THESE de DOCTORAT D ' ETAT

ès Sciences Physiques

présentée

à l ' Université Pierre et Marie Curie

- Paris 6 -

par M. Jean-Claude ANDRE

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse : Une approche statistique de la turbulence inhomogène

soutenue le 3 Mars 1976

devant le jury composé de

MM. P. GERMAIN Président

A. BERROIR
U. FRISCH
P. MOREL
G. SOULAGE
A. VILLEVIEILLE
} Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548124_0011

THESE de DOCTORAT D ' ETAT

ès Sciences Physiques

présentée

à l ' Université Pierre et Marie Curie

- Paris 6 -

par M. Jean-Claude ANDRE

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse : Une approche statistique de la turbulence inhomogène

soutenue le 3 Mars 1976

devant le jury composé de

MM. P. GERMAIN Président

A. BERROIR
U. FRISCH
P. MOREL
G. SOULAGE
A. VILLEVIEILLE
} Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

... la politique ... du rabotage des "inégalités" ... est une idée noble, mais abstraite et statistique.

Olivier Guichard
(Le Monde, 30 mars 1976)

REMERCIEMENTS

Je tiens à souligner que ce travail a été en partie réalisé en collaboration avec Gérard De Moor, Pierre Lacarrère et Régis du Vachat. L'aide de Patrice Fouques Duparc, Gérard Therry et Jean-Louis Thierry me permit d'autre part de progresser plus vite. Qu'ils en soient tous remerciés.

L'aide de M. J. Blanchet fut particulièrement fructueuse et appréciée.

Je remercie le Professeur P. Germain qui a bien voulu présider mon jury de thèse et le Professeur P. Morel pour ses nombreuses remarques et suggestions.

Je remercie également MM. A. Berroir, J. Bessemoulin, J.W. Deardorff, U. Frisch, J.R. Herring, C.E. Leith, G. Soulage et A. Villevieille pour leurs conseils et encouragements.

Une partie de cette étude a été réalisée au National Center for Atmospheric Research à l'aide d'une bourse de la Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique. Que ces deux organismes en soient remerciés.

Enfin je remercie l'ensemble des personnels de l'Etablissement d'Etudes et de Recherches Météorologiques de la Météorologie Nationale qui m'ont permis de poursuivre mes recherches dans les meilleures conditions possibles.

UNE APPROCHE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE INHOMOGENE

SOMMAIRE

RESUME Page I

EXTENDED ABSTRACT III

INTRODUCTION GENERALE 1

I. Introduction et Position du Problème 2

1.1. Le Problème de la Fermeture 4

1.2. L'Irréversibilité Statistique 5

1.3. L'Irréversibilité Stochastique 6

1.4. Les Moments et les Cumulants 8

1.5. La Turbulence dans les Différents Espaces 10

1.5.a. La Turbulence dans l'Espace Physique 10

1.5.b. La Turbulence dans l'Espace de Fourier 12

1.6. Présentation de la Démarche 13

II. L'Amortissement Turbulent 14

2.1. L'Amortissement Turbulent dans l'Espace de Fourier [1] 14

2.1.a. Interaction entre deux Cumulants d'Ordres Successifs 15

2.1.b. Relation entre les Coefficients d'Amortissement 17

2.1.c. Retour à l'Irréversibilité Stochastique 18

2.2. Irréversibilité, Amortissement et Réalisabilité 19

2.2.a. L'Approximation Quasi-Normale 19

2.2.b. Les Hypothèses de Troncature à l'Ordre N avec Amortissement Turbulent 21

2.3. Retour à l'Espace Physique 22

III. Le Problème de la Fermeture en Turbulence Inhomogène 23

3.1. Les Théories de la Turbulence Inhomogène 23

3.1.a. Position du Problème 23

3.1.b. Les Théories Classiques 25

3.2. L'Approximation d'"Ecrêtage" [2] 30

3.2.a. Les Conditions de Réalisabilité 31

3.2.b. Le Calcul des Cumulants d'Ordre Trois 32

3.2.c. Propriétés de l'Approximation d'"Ecrêtage" 33

IV. Application à Trois Expériences de Turbulence Inhomogène 35

4.1. Les Méthodes Numériques 35

4.1.a. La Grille Spatiale et les Conditions aux Limites 36

4.1.b. Le Schéma d'Intégration Temporelle 37

4.1.c. Les Conditions Initiales 38

4.2. La Loi Logarithmique 39

4.2.a. Le Système d'Equations 40

4.2.b. Les Résultats Numériques 43

4.2.c. Influence des Diverses Paramétrisations 49

4.3. La Convection Pénétrante [3] 51

4.3.a. Le Système d'Equations 52

4.3.b. Les Résultats Numériques 55

4.4. La Couche Limite Planétaire de l'Atmosphère 58

4.4.a. Le Système d'Equations 59

4.4.b. Les Résultats Numériques 64

V. Conclusion 72

[1] Irreversible Interaction between Cumulants in Homogeneous, Isotropic, Two-Dimensional Turbulence Theory. 74
The Physics of Fluids, Vol. 27, N° 1 (Janvier 1974), Pages 15 à 21.

[2] Turbulence Approximation for Inhomogeneous Flows- Part I: The Clipping Approximation. 82
Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 33, N° 3 (Mars 1976), Pages
En collaboration avec G. De Moor, P. Lacarrère et R. du Vachat.

[3] Turbulence Approximation for Inhomogeneous Flows- Part II: The Numerical Simulation of a Penetrative Convection Experiment. 88
Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 33, N° 3 (Mars 1976), Pages
En collaboration avec G. De Moor, P. Lacarrère et R. du Vachat.

BIBLIOGRAPHIE GENERALE 98

UNE APPROCHE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE INHOMOGENE

RESUME

Les théories de la turbulence fluide construites par application d'un opérateur de moyenne à l'équation de Navier-Stokes et à l'équation thermodynamique se heurtent au problème de la fermeture. Dans ces équations les termes d'advection sont non linéaires quadratiques et la description de l'évolution d'une corrélation d'ordre i suppose donc la connaissance de corrélations d'ordre (i+1). En conséquence, le système décrivant l'évolution d'un fluide turbulent consiste en une hiérarchie infinie d'équations d'évolution et il est alors nécessaire d'introduire une hypothèse, dite hypothèse de fermeture.

Les hypothèses de fermeture ne peuvent pas être de nature quelconque. Elles doivent en particulier être compatibles avec le phénomène d'irréversibilité statistique, c'est-à-dire qu'elles doivent prendre en compte l'irréversibilité introduite par l'application de l'opérateur de moyenne. Elles doivent pouvoir reproduire, notamment, un éventuel comportement irréversible des diverses quantités moyennes même si ces quantités non moyennées ont au départ un comportement parfaitement réversible.

Ce phénomène correspond mathématiquement à l'existence d'une suite infinie de moments (ou de cumulants) en interaction, suite à travers laquelle il y a une perte d'information. En turbulence homogène et isotrope il est possible de montrer que ce phénomène se traduit par un effet amortissant des cumulants d'ordre élevé sur les cumulants d'ordre inférieur, et ceci quelle que soit la valeur de la seule cause explicite d'irréversibilité que constitue la viscosité.

Cet effet peut être facilement pris en compte en turbulence homogène et isotrope. Il suffit par exemple de considérer, comme hypothèse de fermeture, l'approximation quasi-normale (moments d'ordre quatre reliés aux moments d'ordre deux comme dans une distribution de probabilité gaussienne) et de la compléter en introduisant explicitement un terme d'amortissement irréversible agissant sur les cumulants d'ordre trois.

Malheureusement une démarche aussi simple ne peut pas être employée en turbulence inhomogène car alors il n'est plus possible de montrer que l'irréversibilité stochastique se traduit par une simple relaxation linéaire des cumulants d'ordre trois.

Une étude fine de la turbulence inhomogène nécessitant la description des corrélations triples (dont certaines, telles les flux turbulents d'énergie cinétique, sont physiquement très importantes), l'approximation quasi-normale se présente donc comme l'hypothèse de fermeture à utiliser aussi en turbulence inhomogène. Comme la complexité propre de la turbulence inhomogène rend difficile toute approche systématique, on en est réduit à chercher un mécanisme irréversible et, d'une façon ou d'une autre, amortissant pour l'adjoindre à l'approximation quasi-normale.

Une possibilité consiste à considérer de simples conditions de réalisabilité, déduites de l'inégalité de Schwarz, comme mécanisme à adjoindre, en turbulence inhomogène, à l'hypothèse quasi-normale. Dans cette nouvelle hypothèse de fermeture les corrélations triples seront corrigées, si nécessaire, en écrêtant leur valeur absolue à chaque fois qu'elles dépassent leur borne de réalisabilité. Cette nouvelle hypothèse de fermeture présente l'avantage considérable d'être facilement utilisable pour des calculs concrets (et numériques) de turbulence inhomogène.

Une telle hypothèse de fermeture, pour laquelle une justification à postériori consiste en des comparaisons avec des situations expérimentales ou bien avec des lois connues, permet de retrouver un résultat classique comme l'existence du profil logarithmique de vitesse pour un écoulement entre deux parois parallèles (avec estimation de la constante de von Karman). Elle permet aussi de bien reproduire une autre expérience de laboratoire concernant la convection pénétrante de chaleur dans une cuve d'eau. Dans ces deux cas elle conduit à une bonne description non seulement des paramètres moyens mais aussi des corrélations doubles et triples. Elle permet enfin d'aborder des situations très compliquées d'intérêt géophysique comme la turbulence dans la couche limite planétaire de l'atmosphère terrestre.

A STATISTICAL APPROACH TO INHOMOGENEOUS TURBULENCE

EXTENDED ABSTRACT

Turbulent flows are characterized by a very large spatial and temporal variability of the fluid parameters. For technical and experimental reasons, a precise knowledge of the fields of these parameters is impossible. It is therefore necessary to consider only a part of the information contained in the detailed structure of turbulent flows and this can be done by applying an averaging operator. Theories of turbulence constructed by means of the Navier-Stokes and thermodynamic equations give rise to the closure problem. In these equations the advection terms are nonlinear in the second order and consequently the evolution of an ith order correlation involves (i+1) order correlations. As a result the exact system describing turbulent flows is an infinite hierarchy and it is then necessary to introduce a further hypothesis called a closure assumption.

In order to be general enough, closure assumptions have to affect only sufficiently high order correlations. In fact, first order correlations represent the mean parameters of the fluid and second order correlations correspond to the eddy kinetic energy or to the turbulent fluxes of heat and momentum. These latter quantities, which describe the birth and death of turbulence, shall consequently be taken precisely into account. Triple correlations play also an important role since they are responsible for the transport of turbulence from the regions where it is produced to the other parts of the flow. In the particular, but very important, case of homogeneous turbulence with no mean velocity, triple correlations transport energy from the large scale eddies to the smaller scale ones. A closure assumption, which has to allow a proper description of these various phenomena, shall consequently affect correlations of order at least equal to four.

Nevertheless, such closure assumptions must be compatible with general properties such as statistical irreversibility, i.e. they must take into account the irreversibility introduced by the averaging operator. As an example, they must reproduce a possible time irreversible behavior of mean quantities even if these quantities are perfectely time reversible before application of the averaging operator.

A mathematical consequence of statistic irreversibility is the existence of an infinite series of interactive moments (or cumulants), through which there is a loss of information. This mechanism, called stochastic irreversibility, can be studied easily only in "simplified" cases, such as homogeneous and isotropic turbulence. In this case it can be shown that stochastic irreversibility implies a damping of low order cumulants by higher order ones [1]. Furthermore, this damping mechanism is independent of the only source of explicit irreversibility, that is independent of molecular viscosity [1].

Consequently, stochastic irreversibility can easily be taken into account for homogeneous and isotropic turbulence. A possibility is to consider, as closure assumption, the quasi-normal hypothesis (fourth-order moments related to second-order ones as in a gaussian distribution law) and to introduce an additional irreversible damping term in the equation for the time rate of change of third order cumulants. Unfortunately such a simple approach cannot be used in the case of inhomogeneous turbulence. In this case it is indeed impossible to decide whether or not stochastic irreversibility can be taken into account through the introduction of a linear relaxation for third order cumulants. Furthermore, inherent complexity of inhomogeneous turbulence is such that it is very difficult to undertake any systematic approach. A possibility is then to look for an irreversible and damping mechanism which could be added to the quasi-normal hypothesis. This mechanism should be simple enough in order to be used in a great number of situations.

Realizability conditions provide a framework to construct such a mechanism. It is indeed possible to derive realizability inequalities for triple correlations from generalized Schwarz inequality. These realizability inequalities, which limit the growth of triple correlations, can be used together with the quasi-normal approximation as the additional irreversible damping mechanism: this mechanism consists in "clipping" triple correlations when they violate their respective inequalities [2] . The quasi-normal hypothesis modified by the clipping approximation is a convenient turbulence approximation for studying numerically inhomogeneous turbulence.

The justification of such a closure assumption consists in applying it to various experimental situations. As a first test, the clipping approximation is used to study turbulent channel flows. In this case the logarithmic velocity defect profile is recovered and the von Karman constant is found to be of the order of 0.41 . As a second test the clipping approximation is applied to the description of a laboratory experiment concerning penetrative convection. In this case mean temperature profiles and double correlations are recovered as well as a physically important triple correlation such as the vertical flux of eddy kinetic energy [3]. Finally the clipping approximation is used for preliminary investigation of the diurnal evolution of the turbulent planetary boundary layer of the earth atmosphere.

UNE APPROCHE STATISTIQUE DE LA TURBULENCE INHOMOGENE

INTRODUCTION GENERALE

I. Introduction et Position du Problème

La turbulence fluide se caractérise par une très grande variabilité spatiale et temporelle des paramètres du fluide à l'intérieur de l'écoulement. Une connaissance détaillée des champs de ces paramètres est illusoire, aussi bien du point de vue pratique et expérimental que du point de vue théorique. Il est donc nécessaire de ne considérer qu'une partie de l'information contenue dans la structure détaillée d'un écoulement turbulent ou, en d'autres termes, d'en extraire l'information utile. Un tel processus se réalise en général grâce à une approche statistique, c'est-à-dire que l'on ne s'intéresse qu'aux valeurs moyennes de certains paramètres.

Les équations de la Mécanique des Fluides étant non-linéaires quadratiques, l'application d'un opérateur de moyenne à ces équations entraîne l'apparition du problème de la fermeture. En effet, tout système construit de façon statistique à partir des équations de la Mécanique des Fluides comporte alors plus d'inconnues que d'équations. On peut penser que ce problème de fermeture des équations de la turbulence se pose de façon quelque peu différente selon le type de moyennes que l'on considère. En effet, dans le cas où l'on opère des moyennes spatiales, il paraît assez clair que si le domaine spatial dans lequel sont effectuées les moyennes est "suffisamment" petit, le problème de fermeture se posera alors de façon moins cruciale. Toutefois cette notion de domaine de moyenne suffisamment petit est très difficile à préciser et sa quantification peut naturellement varier selon le type d'écoulements turbulents considérés. C'est pourquoi nous travaillerons dans le cas le plus général, c'est-à-dire que nous ne nous appuierons pas sur d'éventuelles simplifications dues à une façon particulière de prendre les moyennes. Dans ce cas le problème de la fermeture devra donc être abordé de façon suffisamment précise et l'on ne pourra plus se contenter d'approximations relativement peu élaborées.

Une telle approche, bien qu'à priori plus difficile, présente toutefois deux types d'avantages. Tout d'abord la solution que l'on pourra apporter au problème de la fermeture sera indépendante de la taille du domaine de moyenne et elle permettra donc d'envisager des domaines de grande taille, compensant par là la complexité introduite par des approximations plus "sophistiquées". D'autre part une telle approche pourra aussi s'appliquer à d'autres types de moyennes, telles que les moyennes temporelles ou bien les moyennes d'ensemble.

Il y a en effet deux points de vue possibles en ce qui concerne l'approche statistique des équations de la Mécanique des Fluides. Les moyennes peuvent être spatiales et/ou temporelles et dans ce cas il est nécessaire de ne considérer qu'une seule réalisation de l'écoulement turbulent. Une autre possibilité est de considérer un ensemble de réalisations de l'écoulement turbulent, ensemble dans lequel les paramètres du fluide varient d'une réalisation à l'autre; on est alors amené à considérer des moyennes sur cet ensemble de réalisations.

L'opérateur "moyenne d'ensemble" possède un grand nombre de propriétés qui facilitent la mise en équations du problème de la turbulence. Il est en effet linéaire et idempotent et il commute avec les opérateurs de dérivation spatiale et temporelle. Lorsque l'on considère un opérateur de moyenne spatio-temporelle, la linéarité subsiste mais l'idempotence et la commutativité avec les opérateurs de dérivation ne sont plus trivialement assurées. La liaison entre les différents types de moyennes n'est pas élucidée puisque cela nécessiterait notamment la démonstration de l'ergodicité des équations de Navier-Stokes. Toutefois nous travaillerons en utilisant soit des moyennes d'ensemble soit des moyennes spatio-temporelles et dans ce dernier cas nous supposerons vérifiées l'idempotence et la commutativité avec les opérateurs de dérivation (Axiomes de Reynolds, cf. par example Kampé de Fériet, 1951).

1.1. Le Problème de la Fermeture

Les théories de la turbulence construites par application d'un opérateur de moyenne aux équations de la Mécanique des Fluides (équations de Navier-Stokes et/ou équation thermodynamique) se heurtent au problème de la fermeture. En effet, dans ces équations, les termes d'advection (*) et de pression s'expriment de façon non-linéaire quadratique à partir des diverses composantes de la vitesse. De ce fait l'équation d'évolution temporelle de la vitesse moyenne fait apparaître de nouvelles inconnues comme les corrélations doubles entre deux composantes de la vitesse (appelées aussi moments d'ordre deux). Dans l'équation d'évolution des moments d'ordre deux, que l'on peut construire simplement, apparaissent alors des moments d'ordre trois, c'est-à-dire des corrélations entre trois composantes de la vitesse. Plus généralement, l'évolution d'un moment d'ordre n est fonction de moments d'ordre (n+1) et ceci constitue le problème de la fermeture. Il est donc nécessaire d'introduire une hypothèse - appelée hypothèse de fermeture- à un certain niveau i, c'est-à-dire de postuler une relation entre les moments d'ordre (i+1) et les moments d'ordre inférieur ou égal à i. Pour être acceptables, les hypothèses de fermeture doivent évidemment permettre au système d'équations ainsi fermé de vérifier toutes les propriétés connues du système exact, c'est-à-dire du système infini - ou hiérarchie- des équations aux corrélations.

Le problème de la fermeture, ainsi défini, peut être schématisé de la façon suivante. Si les équations de la mécanique des fluides sont représentées par une équation symbolique possédant la même non-linéarité quadratique (**), c'est-à-dire par une équation de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u\,u - \alpha u \qquad (1\text{-}1)$$

où le terme linéaire ($-\alpha u$) symbolise, par exemple, l'action de la viscosité, la hiérarchie d'équations pour les différentes corrélations statistiques est donnée par (si $\overline{\ .\ }$ désigne l'opérateur de moyenne):

(*) Ces termes sont aussi parfois appelés termes de convection.

(**) Dans l'équation symbolique (1-1) le terme non-linéaire $u\,u$ représente en fait une somme de termes de structure quadratique et non le carré de la vitesse.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \overline{uu} - \alpha \bar{u} \quad , \tag{1-2}$$

$$\frac{\partial \overline{uu}}{\partial t} = \overline{uuu} - \alpha \overline{uu} \quad , \tag{1-3}$$

.....

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\underbrace{u....u}_{\substack{n \\ \text{facteurs}}}} = \overline{\underbrace{u.....u}_{\substack{(n+1) \\ \text{facteurs}}}} - \alpha \overline{\underbrace{u.....u}_{\substack{n \\ \text{facteurs}}}} \tag{1-4}$$

.....

Le problème de la fermeture, tel qu'il vient d'être défini, est le problème central de toutes les théories de la turbulence, que celles-ci s'appliquent à un fluide compressible ou non et à des cas homogènes et isotropes ou non : il s'agit d'exprimer les corrélations d'ordre élevé entre les composantes de la vitesse - et éventuellement avec la température- à partir de ces mêmes corrélations d'ordre inférieur.

1.2. L'Irréversibilité Statistique

L'application d'un opérateur de moyenne à un champ fluctuant quelconque a pour effet d'introduire une irréversibilité fondamentale qui est due à la perte d'information ainsi occasionnée. Pour éclairer concrètement ce point il est possible de considérer un exemple simple emprunté à Kraichnan (1961) et repris par Orszag (1973).

Dans cet exemple on considère un oscillateur harmonique aléatoire $q_b(t)$

$$\frac{dq_b(t)}{dt} = - i\, b\, q_b(t) \quad ; \quad q_b(0) = 1 \tag{1-5}$$

où l'élément fluctuant est introduit grâce à la pulsation b qui est choisie de façon aléatoire, avec une distribution de probabilité $P(b)$ gaussienne centrée

$$P(b) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(- \frac{b^2}{2\sigma^2} \right) \quad . \tag{1-6}$$

L'oscillateur harmonique $q_b(t)$ obéit évidemment à

$$q_b(t) = e^{-ibt} \tag{1-7}$$

et il varie donc de façon sinusoïdale au cours du temps. Si nous nous intéressons maintenant au comportement moyen de cet oscillateur, celui-ci est donné par

$$\overline{q_b(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} q_b(t)\, P(b)\, db = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-b^2}{2\sigma^2} - ibt\right) db = \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2}\right) \tag{1-8}$$

et l'on constate que l'oscillateur moyen tend irréversiblement vers zéro lorsque le temps t croît indéfiniment. A ce niveau il est clair que c'est l'application de l'opérateur de moyenne $\int_{-\infty}^{+\infty} . \, P(b)\, db$ qui a fait apparaître la relaxation irréversible.

Des situations analogues peuvent évidemment se présenter en turbulence où, malgré la réversibilité temporelle des équations de la mécanique des fluides parfaits, des comportements irréversibles dans le temps peuvent apparaître lorsque l'on applique un opérateur de moyenne. Les hypothèses de fermeture doivent donc être compatibles avec une telle propriété, c'est-à-dire qu'elles doivent permettre de décrire le comportement irréversible introduit par l'application de l'opérateur de moyenne.

1.3. Irréversibilité Stochastique

Lorsque l'on considère une hiérarchie infinie du type de celle décrite par les équations (1-4) pour $n \in [1, \infty[$, la question se pose de savoir comment s'y traduit le phénomène d'irréversibilité statistique. En effet si l'équation symbolique (1-1) est réversible dans le temps il est facile de voir que chacune des équations aux moments (1-4) est elle aussi réversible dans le temps, ce qui semble en contradiction avec l'irréversibilité introduite par les moyennes. Ce paradoxe apparent peut être levé si l'on considère de nouveau l'exemple de l'oscillateur harmonique aléatoire du paragraphe 1.2. (Orszag, 1973). Dans cet exemple il est possible de définir les

moments d'ordre n comme $\overline{b^n q_b(t)}$. Conformément à (1-5) leur équation d'évolution s'écrit

$$\frac{d}{dt}\overline{b^n q_b(t)} = -i\,\overline{b^{n+1} q_b(t)} \quad . \tag{1-9}$$

Par éliminations successives, l'équation donnant le comportement de l'oscillateur moyen $\overline{q_b(t)}$ s'écrit

$$\frac{d^n}{dt^n}\overline{q_b(t)} = (-i)^n\,\overline{b^n q_b(t)} \quad . \tag{1-10}$$

Dans le cas d'un système <u>fini</u> d'équations telles que (1-9), c'est-à-dire si $n \leqslant N_o$, $\overline{q_b(t)}$ peut être calculé grâce à son développement de Taylor

$$\overline{q_b(t)} = \sum_{n=0}^{N_o} \frac{t^n}{n!}\left(\frac{d^n}{dt^n}\overline{q_b(t)}\right)_{t=0} = \sum_{n=0}^{N_o} \frac{(-it)^n}{n!}\,\overline{b^n q_b(0)} = \sum_{n=0}^{N_o} \frac{(-it)^n}{n!}\,\overline{b^n} \tag{1-11}$$

et l'équation ci-dessus ne décrit pas la relaxation irréversible de $\overline{q_b(t)}$ vers zéro lorsque t augmente. Par contre, dans le cas d'une hiérarchie infinie ($N_o \to \infty$) $\overline{q_b(t)}$ est donné par

$$\overline{q_b(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-it)^{2m}}{(2m)!}\,\overline{b^{2m}} \quad , \tag{1-12}$$

et puisque $$\overline{b^{2m}} = \frac{(2m-1)!}{2^{m-1}(m-1)!}\,\sigma^{2m} \tag{1-13}$$

il vient $$\overline{q_b(t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\sigma^2 t^2/2)^m}{m!} = \exp\left(-\sigma^2 t^2/2\right) \quad . \tag{1-14}$$

Le paradoxe cité plus haut se réduit donc dans cet exemple à ce que l'exponentielle $\exp\left(-\sigma^2 t^2/2\right)$, qui tend irréversiblement vers zéro lorsque t augmente, est la somme d'un nombre infini de termes qui tendent alternativement vers $\pm\infty$. Cet exemple a pour intfet de montrer que c'est le nombre infini d'équations de la hiérarchie qui permet seul de retrouver le phénomène de relaxation irréversible , ou, en d'autres termes, que c'est le nombre infini d'équations qui traduit l'irréversibilité statistique. Ce phénomène, baptisé irréversibilité stochastique (Orszag, 1973) n'a malheureusement pas été beaucoup étudié mais il s'agit pourtant d'un phénomène essentiel en turbulence.

1.4. Les Moments et les Cumulants

Avant d'aborder le problème de la fermeture il est utile de considérer de nouvelles quantités statistiques sur lesquelles il est plus aisé de travailler: les cumulants.

En théorie des probabilités (cf. par exemple Lumley, 1970) les moments d'ordre n d'une variable aléatoire u sont reliés aux dérivées d'ordre n à l'origine de la fonction caractéristique F(a) (*)

$$F(a) = \int e^{au} P(u)\, du = \overline{e^{au}} \quad , \tag{1-15}$$

soit

$$\frac{\partial^n F}{\partial a^n}\,(a=0) = \overline{u^n} \quad . \tag{1-16}$$

Les cumulants d'ordre n $T^{(n)}$ sont alors définis comme étant les moments de la seconde fonction caractéristique L(a)

$$L(a) = \mathrm{Log}\, F(a) \quad , \tag{1-17}$$

soit

$$T^{(n)} = \frac{\partial^n \mathrm{Log} F(a)}{\partial a^n}\,(a=0) \quad . \tag{1-18}$$

(*) La définition classique de la fonction caractéristique a été légèrement simplifiée par suppression du facteur $i=\sqrt{-1}$ dans l'exponentielle. Une telle définition peut évidemment ne pas avoir de sens pour certains types de distribution de probabilité. Toutefois cela n'a pas d'incidence dans la suite puisque nous ne nous intéressons à la fonction caractéristique que comme intermédiaire mathématique permettant d'établir de façon condensée la structure des équations aux cumulants.

Les liaisons qui existent entre les moments et les cumulants sont contenues dans la relation (1-18). A titre d'exemple, et pour une variable unidimensionnelle u, on a classiquement, si u' désigne la fluctuation turbulente ($u' = u - \overline{u}$) :

$$T^{(0)} = 0 \ , \quad T^{(1)} = \overline{u} \ , \quad T^{(2)} = \overline{u'^2} \ , \quad T^{(3)} = \overline{u'^3} \ , \quad T^{(4)} = \overline{u'^4} - 3\,\overline{u'^2}^2 \ , \ \ldots \qquad (1\text{-}19)$$

Le cumulant d'ordre 1 est égal au moment d'ordre 1, les cumulants d'ordre 2 et 3 sont égaux respectivement aux moments centrés d'ordre 2 et 3 et à partir de l'ordre 4 inclus la relation entre le cumulant d'ordre i et les moments centrés d'ordre inférieur ou égal à i devient de plus en plus compliquée.

Les cumulants ont la propriété intéressante d'être nuls à partir de l'ordre 3 inclus pour une distribution de probabilité normale (ou gaussienne). Comme en turbulence les distributions normales ou "presque" normales sont souvent utilisées, on conçoit l'utilité des cumulants pour formuler les théories de la turbulence.

La structure symbolique des équations aux moments a déjà été indiquée au paragraphe 1.1. :

$$\frac{\partial \overline{u^n}}{\partial t} = \overline{u^{n+1}} - \alpha\, \overline{u^n} \qquad . \qquad (1\text{-}20)$$

La structure symbolique des équations aux cumulants peut être trouvée simplement à partir de l'équation symbolique (1-1) et des définitions (1-15), (1-17) et (1-18) :

$$\frac{\partial L}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 L}{\partial a^2} + \left(\frac{\partial L}{\partial a} \right)^2 \right] - \alpha\, a \frac{\partial L}{\partial a} \qquad , \qquad (1\text{-}21)$$

soit

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} + \alpha\, T^{(n)} = T^{(n+1)} + \sum_{k=0}^{n-1} T^{(k+1)}\, T^{(n-k)} \qquad . \qquad (1\text{-}22)$$

Sur l'équation (1-22) il est clair que le problème de la fermeture se pose aussi en ce qui concerne les cumulants. Toutefois, la présence au second membre de (1-22) de produits de deux cumulants va rendre possibles un certain nombre de calculs qui permettront de justifier certains types d'hypothèses de fermeture (Section 2).

1.5. Le Problème de la Turbulence dans les Différents Espaces

Selon l'espace dans lequel les équations sont formulées et selon le type de fluide étudié (compressible ou non) ou selon le type de turbulence considérée (homogène et isotrope ou non), d'autres types de problèmes de fermeture peuvent apparaître. En particulier une formulation dans l'espace physique ordinaire entraine l'apparition de deux nouveaux problèmes de fermeture pour l'action de la viscosité d'une part et pour l'action de la pression d'autre part.

1.5.a. La Turbulence dans l'Espace Physique

Considérons dans une première étape les équations de Navier-Stokes seules, c'est-à-dire les équations gouvernant l'évolution d'un fluide visqueux incompressible. Celles-ci s'écrivent, en notations tensorielles et en appliquant la convention de sommation sur les indices répétés dans un même monome:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \qquad (1\text{-}23)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \qquad (1\text{-}24)$$

où $\underline{u}=u_i(i=1à3)$ représente la vitesse, P la pression cinématique, ν la viscosité cinématique, $\underline{x}=x_i(i=1à3)$ des coordonnées cartésiennes d'espace et t le temps.

L'application d'un opérateur de moyenne (noté $\overline{\cdot}$) possédant les "bonnes" propriétés (c'est-à-dire linéarité, idempotence et commutativité avec les opérateurs de dérivation spatiaux et temporels) permet alors d'écrire l'équation d'évolution de la vitesse moyenne $\overline{u_i}$:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} = - \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_k \partial x_k} \quad . \qquad (1\text{-}25)$$

L'équation d'évolution de la corrélation double $\overline{u_i u_j}$ se construit alors simplement à

partir des équations de Navier-Stokes Eqs.(1-23) et (1-24) et elle s'écrit:

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} = - \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} - \overline{\left(u_i \frac{\partial P}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial P}{\partial x_i} \right)} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} \qquad (1\text{-}26)$$

Dans cette équation apparaissent trois nouvelles inconnues:

- la corrélation triple $\overline{u_i u_j u_k}$ qui donne naissance au problème de la fermeture tel qu'il a été décrit au paragraphe 1.1. ,
- l'action de la pression $- \overline{\left(u_i \frac{\partial P}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial P}{\partial x_i} \right)}$,
- une partie de l'action de la viscosité $- 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$.

En ce qui concerne tout d'abord l'évaluation des termes de pression se pose un nouveau problème: comment exprimer ce terme en fonction des seules variables $\overline{u_i}$, $\overline{P}$ et $\overline{u_i u_j}$? En toute rigueur, et pour un fluide évanescent à l'infini, la pression peut être calculée en prenant la divergence de l'équation de Navier-Stokes (1-23) et en tenant compte de l'équation de continuité (1-24)

$$- \frac{\partial^2 P}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_m u_n}{\partial x_m \partial x_n} \quad , \qquad (1\text{-}27)$$

ce qui donne, par exemple

$$\overline{u_j \frac{\partial P}{\partial x_i}}(\underline{x}) = - \overline{u_j(\underline{x}) \frac{\partial}{\partial x_i} \iiint \frac{\partial^2 u_m u_n}{\partial x_m \partial x_n}(\underline{r}) \cdot \frac{1}{|\underline{x}-\underline{r}|} d^3 r} \quad . \qquad (1\text{-}28)$$

Une relation telle que l'équation (1-28) n'est évidemment pas utilisable pour évaluer de façon pratique les termes de pression et elle ne permet pas non plus de ramener ces termes à une fonction de corrélations triples simples de la forme $\overline{u_i u_j u_k}$. Il se pose donc ici un nouveau problème de fermeture.

Le même genre de difficulté se présente en ce qui concerne le terme dû à la viscosité puisqu'il apparaît comme une corrélation double entre gradients de vitesse et que ce terme n'est pas réductible à une fonction de corrélations doubles simples de la forme $\overline{u_i u_j}$. Ce terme donne lui aussi naissance à un autre problème de fermeture.

Notons à ce sujet que les deux problèmes de fermeture concernant l'action des fluctuations de pression et l'action des termes de diffusion moléculaire peuvent, en théorie, être résolus exactement dans l'espace physique. Il suffit pour cela de considérer non plus des corrélations entre diverses fluctuations au même point mais au contraire des corrélations entre fluctuations en des points différents. C'est là l'esprit de la démarche entreprise par Kolovandin et Vatutin (1972) mais malheureusement cela conduit à des calculs extrêmement lourds qui rendent cette approche très formelle. Par contre l'idée de décrire la turbulence à l'aide de corrélations déplacées se révèle de ce point de vue extrêmement intéressante si l'on applique ensuite une transformation de Fourier, car alors les différents opérateurs de différentiation spatiale ont des images de Fourier assez simples (cf. Paragraphe 1.5.b.).

1.5.b. La Turbulence dans l'Espace de Fourier

Si nous nous plaçons maintenant dans l'espace de Fourier, c'est-à-dire si nous étudions la transformée de Fourier $v_i(\underline{k})$ de la vitesse $u_i(\underline{x})$ (*)

$$v_i(\underline{k}) = \iiint u_i(\underline{x})\ e^{i\underline{k}.\underline{x}}\ d^3x \quad , \qquad (1\text{-}29)$$

les équations de Navier-Stokes se transforment en (cf. par exemple Batchelor, 1953) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) v_i(\underline{k}) = - i k_j \int_{\underline{p}+\underline{q}=\underline{k}} v_i(\underline{p})\ v_j(\underline{q})\ d^3p \ - i k_i \mathcal{P}(\underline{k}) \qquad (1\text{-}30)$$

$$k_i v_i(\underline{k}) = 0 \qquad (1\text{-}31)$$

où $\mathcal{P}(\underline{k})$ est la transformée de Fourier de la pression $P(\underline{x})$.

L'image de Fourier de l'équation (1-27) est alors

(*) Nous supposerons ici l'existence de la transformée de Fourier de la vitesse. Une étude rigoureuse devrait faire intervenir l'analyse harmonique généralisée (cf. Batchelor, 1953) ou bien ne considérer qu'un développement en série de Fourier en supposant la vitesse spatialement périodique dans une boite de côté L et en faisant ensuite tendre le volume de la boite vers l'infini (Orszag et Kruskal, 1968). Cette dernière méthode est en particulier utilisée dans l'article [1] commenté à la Section 2.

$$\mathcal{P}(\underline{k}) = - \frac{k_m k_n}{k^2} \int_{\underline{p}+\underline{q}=\underline{k}} v_m(\underline{p})\, v_n(\underline{q})\, d^3p \qquad (1\text{-}32)$$

ce qui permet d'écrire la transformée de Fourier de l'équation de Navier-Stokes sous la forme (après symétrisation en $\underline{p}$ et $\underline{q}$) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) v_i(\underline{k}) = - \frac{i}{2} D_{imn}(\underline{k}) \int_{\underline{p}+\underline{q}=\underline{k}} v_m(\underline{p})\, v_n(\underline{q})\, d^3p \qquad (1\text{-}33)$$

$$D_{imn}(\underline{k}) = k_m \Delta_{in}(\underline{k}) + k_n \Delta_{im}(\underline{k}) \qquad (1\text{-}34)$$

$$\Delta_{mn}(\underline{k}) = \delta_{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \qquad (1\text{-}35)$$

Sous la forme (1-33) il est évident que les termes de pression (qui apparaissent par l'intermédiaire du terme en $k_m k_n / k^2$ dans l'équation (1-35)) ne donnent plus naissance à un problème de fermeture distinct du problème de fermeture général discuté au paragraphe 1.1.

En ce qui concerne l'action de la viscosité, le passage dans l'espace de Fourier supprime là encore les difficultés. En effet le terme représentant l'action de la viscosité ($\nu\, \partial^2 u_i / \partial x_k \partial x_k$) a pour image de Fourier $- \nu k^2 v_i(\underline{k})$ et en conséquence l'action de la viscosité sur la corrélation double $\overline{v_i(\underline{p}) v_j(\underline{q})}$ se traduira, au second membre de son équation d'évolution, par l'introduction du terme $- \nu (p^2 + q^2) \overline{v_i(\underline{p}) v_j(\underline{q})}$.

1.6. Présentation de la Démarche

Il résulte des considérations précédentes qu'il est préférable, dans un premier stade, d'aborder le problème de la fermeture dans l'espace de Fourier où ce problème se présente de façon isolée (Section 2). Les conclusions qui pourront être tirées de cette approche ne seront évidemment pas immédiatement transposables dans l'espace physique ordinaire mais il sera possible de s'en inspirer pour traiter le cas le plus général de la fermeture des équations en turbulence inhomogène dont le cadre naturel est l'espace physique (Section 3). A la Section 4 une telle hypothèse de fermeture sera utilisée pour décrire des écoulements inhomogènes classiques.

II. L'Amortissement Turbulent

Dans cette Section nous isolerons, dans la hiérarchie d'équations aux cumulants, le mécanisme qui rend compte de l'irréversibilité stochastique. Nous montrerons que ce mécanisme peut se ramener à une interaction irréversible entre un cumulant d'ordre n et l'ensemble des cumulants d'ordre supérieur ou égal à n. Cette propriété sera utilisée pour justifier un type d'hypothèses de fermeture: les hypothèses de troncature avec amortissement turbulent.

2.1. L'Amortissement Turbulent dans l'Espace de Fourier [1]

Comme il a été indiqué au paragraphe 1.6. nous considèrerons d'abord le problème de la fermeture dans le cas de la transformée de Fourier de l'équation de Navier-Stokes (Eqs.(1-33) et (1-31)) que nous réécrirons, en changeant légèrement les notations:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2 \right) u_\alpha(\underline{k}) = -\frac{i}{2} D_{\alpha\rho\sigma}(\underline{k}) \int_{\underline{p}+\underline{q}=\underline{k}} u_\rho(\underline{p})\, u_\sigma(\underline{q})\, d\underline{p} \qquad (2\text{-}1)$$

$$k_\alpha\, u_\alpha(\underline{k}) = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

avec $$D_{\alpha\beta\gamma}(\underline{k}) = k_\beta \Delta_{\alpha\gamma}(\underline{k}) + k_\gamma \Delta_{\alpha\beta}(\underline{k}) \quad ; \quad \Delta_{\alpha\beta}(\underline{k}) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \qquad (2\text{-}3)$$

Dans (2-1), (2-2) et (2-3) les indices peuvent prendre les valeurs 1,2 et 3 ou 1 et 2 suivant la dimension spatiale que l'on considère. L'équation (2-1) peut toujours être symbolisée par une équation du type (1-1), de telle sorte que la hiérarchie d'équations aux cumulants est de la forme (1-22).

Le principe du raisonnement sera exposé à l'aide des équations symboliques (1-22). Toutefois, à chaque étape du calcul, nous traduirons ces résultats symboliques dans le cas de la turbulence homogène et isotrope des équations de Navier-Stokes (2-1) à (2-3). La restriction au cas homogène et isotrope est utilisée car elle

permet de poursuivre plus avant un grand nombre de calculs et d'arriver à des expressions plus maniables. L'hypothèse d'homogénéité permet d'autre part de considérer que la vitesse moyenne est nulle ($T^{(1)} = 0$, cf. Eq.(1-19)) puisque les équations de Navier-Stokes sont invariantes par transformation de Galilée. Malgré ces simplifications les calculs, qui sont exposés en détail en [1], sont assez lourds ce qui explique l'utilisation des équations symboliques (1-22).

2.1.a. Interaction entre deux Cumulants d'Ordres Successifs

Considérons donc les équations d'évolution de deux cumulants d'ordres successifs i et (i+1) dans le cas d'une turbulence sans vitesse moyenne ($T^{(1)} = 0$):

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} + \alpha\, T^{(i)} = T^{(i+1)} + \sum_{k=1}^{i-2} T^{(k+1)}\, T^{(i-k)} \qquad (2\text{-}4)$$

$$\frac{\partial T^{(i+1)}}{\partial t} + \alpha\, T^{(i+1)} = T^{(2)}\, T^{(i)} + T^{(i+2)} + \sum_{k=2}^{i-2} T^{(k+1)}\, T^{(i+1-k)} \qquad (2\text{-}5)$$

En supposant que le temps caractéristique d'évolution du cumulant $T^{(i+1)}$ est plus petit que celui des cumulants d'ordre inférieur ou égal à i et en négligeant pour l'instant l'action du terme en $T^{(i+2)}$, une intégration temporelle de l'équation (2-5) donne:

$$T^{(i+1)} = \frac{1}{\alpha}\left(T^{(2)}\, T^{(i)} + \sum_{k=2}^{i-2} T^{(k+1)}\, T^{(i+1-k)} \right) . \qquad (2\text{-}6)$$

En reportant dans l'équation (2-4) on obtient donc, pour $T^{(i)}$, une équation d'évolution de la forme

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} + \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} T^{(2)}\right) T^{(i)} = T^{(2)}\, T^{(i-1)} + \sum_{k=2}^{i-2} T^{(k+1)} \left(T^{(i-k)} + \frac{1}{\alpha} T^{(i+1-k)} \right) . \qquad (2\text{-}7)$$

En comparant les équations (2-4) et (2-7) il est clair que le terme en $T^{(i+1)}$ agit

de différentes façons sur l'évolution de $T^{(i)}$ mais que l'une de ces influences est d'introduire, dans l'équation d'évolution de $T^{(i)}$, un terme proportionnel à $T^{(i)}$ par l'intermédiaire de $T^{(2)}$. Sur une équation symbolique telle que (2-7) il est impossible de préjuger du signe du terme $T^{(2)}/\alpha$ mais la spécialisation au cas de la turbulence homogène et isotrope de l'équation de Navier-Stokes (2-1) montre qu'un des effets du cumulant $T^{(i+1)}$ est d'introduire un <u>amortissement</u> dans l'équation d'évolution de $T^{(i)}$. Le coefficient d'amortissement, qui est l'équivalent du terme $T^{(2)}/\alpha$ du membre de gauche de (2-7), est donné par, pour le cumulant d'ordre i construit avec les vecteurs d'onde $\underline{k}_1$ à $\underline{k}_i$ (Section IV de [1]) (*):

$$\frac{1}{\alpha} T^{(2)} \longrightarrow \int_{\underline{r}+\underline{s}=\underline{k}_1} \frac{B_2(k_1,r,s)\, U(s)}{(r^2+s^2+k_2^2+\ldots+k_i^2)}\, d^2r + \left[\underline{k}_1 \leftrightarrow \underline{k}_2\right] + \ldots + \left[\underline{k}_1 \leftrightarrow \underline{k}_i\right] \geqslant 0 \qquad (2\text{-}8)$$

où - $U(k)$ est le spectre modal d'énergie relié au cumulant d'ordre 2 par

$$T^{(2)}{}^{\alpha\ \beta}_{\underline{k}\ -\underline{k}} = \overline{u_\alpha(\underline{k})\, u_\beta(-\underline{k})} = \Delta_{\alpha\beta}(\underline{k})\, U(k) \qquad (2\text{-}9)$$

avec $\Delta_{\alpha\beta}(\underline{k})$ donné par (2-3) ;

- $B_2(k,r,s)$ est un coefficient géométrique typiquement positif résultant de la contraction de termes comme $D_{\alpha\beta\delta}(\underline{k})$ et $\Delta_{\alpha\beta}(\underline{k})$

$$B_2(k,r,s) = \frac{(k^2-s^2)(r^2-s^2)(-k^4-r^4-s^4+2k^2r^2+2k^2s^2+2r^2s^2)}{4k^2r^2s^2} \quad ; \quad (2\text{-}10)$$

- ν est la viscosité (dont le rôle est joué par α dans les équations (1-1), (2-4) et (2-5));
- $\left[\underline{k}_1 \leftrightarrow \underline{k}_2\right]$ représente les termes additionnels obtenus par la permutation indiquée des vecteurs d'onde $\underline{k}_1$ et $\underline{k}_2$.

Nous résumerons ce paragraphe en disant qu'un effet caractéristique des cumulants d'ordre (i+1) est d'amortir la croissance des cumulants d'ordre i. Cet amortissement n'est possible que si la viscosité est suffisamment grande pour justifier le passage de l'équation (2-5) à l'équation (2-6) mais nous verrons aux paragraphes

(*) Les résultats donnés ici ne sont valables, en toute rigueur, que dans un espace à deux dimensions. En turbulence tridimensionnelle les calculs ne peuvent pas se mener aussi loin sous une forme aussi compacte mais il n'en reste pas moins que le concept d'amortissement est toujours valable.

suivants que cette condition peut être éliminée, en accord avec la notion d'irréversibilité statistique (et donc stochastique).

2.1.b. Relation entre les Coefficients d'Amortissement

Le résultat du paragraphe précédent peut maintenant être appliqué de la façon suivante. Puisque chaque cumulant $T^{(n+1)}$ amortit la croissance des cumulants d'ordre n qui, à leur tour, amortissent la croissance des cumulants d'ordre (n-1), on peut considérer que l'un des effets de l'infinité de cumulants d'ordre $n \geqslant i+2$ est d'introduire un coefficient d'amortissement $\mu_e^{(i+1)}$ dans l'équation d'évolution du cumulant d'ordre (i+1). Ce coefficient d'amortissement est bien entendu inconnu mais il est possible d'établir une relation de récurrence pour la suite $\mu_e^{(i)}$. Pour cela il suffit de tenir compte, dans l'équation (2-5), de l'amortissement $-\mu_e^{(i+1)}\, T^{(i+1)}$ qui s'introduit à la place de $T^{(i+2)}$, soit

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha + \mu_e^{(i+1)}\right) T^{(i+1)} = T^{(2)}\, T^{(i)} + \sum_{k=2}^{i-2} T^{(k+1)}\, T^{(i+1-k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} T^{(k+1)}\, T^{(i+1-k)} \qquad (2\text{-}11)$$

Il est alors possible de calculer $T^{(i+1)}$ grâce à l'équation (2-11) mais cette fois l'hypothèse selon laquelle le temps caractéristique d'évolution de $T^{(i+1)}$ est plus petit que celui des cumulants d'ordre inférieur ou égal à i est bien vérifiée. Ceci permet d'écrire

$$T^{(i+1)} = \frac{T^{(2)}}{\alpha + \mu_e^{(i+1)}}\, T^{(i)} + \ldots \qquad (2\text{-}12)$$

et, en reportant dans l'équation (2-4), il vient

$$\mu_e^{(i)} = \frac{T^{(2)}}{\alpha + \mu_e^{(i+1)}} \quad . \qquad (2\text{-}13)$$

Dans le cas de l'équation de Navier-Stokes l'équation (2-13) s'écrit (Equation (11) de [1]) :

$$\mu_e^{(i)}(k) = \int_{\underline{r}+\underline{s}+\underline{k}=0} \frac{B_2(k,r,s)\, U(s)}{\mu^{(i+1)}(r) + \mu^{(i+1)}(s) + (i-1)\, \mu^{(i+1)}(k)}\, d^2r \qquad (2\text{-}14)$$

$$\mu^{(i+1)}(k) = \nu k^2 + \mu_e^{(i+1)}(k)$$

La relation de récurrence (2-14) peut être résolue pour donner $\mu_e^{(i)}$. Pour cela il suffit d'observer que, pour i grand

$$i\, \mu_e^{(i)} = (i+1)\, \mu_e^{(i+1)} \quad . \qquad (2\text{-}15)$$

En utilisant les équations (2-14) et (2-15) il est alors possible de calculer $\mu_e^{(i_o)}$ pour un certain $i = i_o$ grand et à partir de là de calculer $\mu_e^{(i)}$ pour $i < i_o$ grâce à la relation (2-14).

2.1.c. Retour à l'Irréversibilité Stochastique

Il est possible d'utiliser les résultats du paragraphe précédent pour construire un type d'hypothèses de fermeture. Dans ces hypothèses, dites hypothèses de troncature à l'ordre n avec amortissement turbulent, les cumulants d'ordre $i \geqslant n+1$ sont négligés mais leur action est prise en compte par l'introduction d'un amortissement $-\mu_e^{(n)}$ au second membre de l'équation d'évolution du dernier cumulant décrit $T^{(n)}$. Une telle hypothèse de fermeture répondra alors au critère énoncé au paragraphe 1.2. si l'amortissement $\mu_e^{(n)}$ (qui est un terme irréversible) a une valeur non nulle lorsque la viscosité est nulle. Sous la forme (2-14) il est possible d'étudier le comportement de $\mu_e^{(n)}(k)$ lorsque la viscosité tend vers zéro. Une étude numérique de ce problème (Sections VI et VIII de [1]) a permis de montrer qu'effectivement $\mu_e^{(n)}(k)$ tendait vers une limite non nulle lorsque la viscosité tendait vers zéro.

En d'autres termes l'hypothèse de troncature à l'ordre n avec amortissement turbulent correspond à un système fini de n équations dont les (n-1) premières sont réversibles dans le temps à viscosité nulle (Equations (2-4) pour $i \leq n-1$ et $\alpha = 0$) et dont la dernière est irréversible grâce à l'introduction du coefficient d'amortissement $\mu_e^{(n)}$ (Equation (2-11) pour $i=n-1$ et $\alpha = 0$). Cette hypothèse de fermeture prend donc en compte l'irréversibilité stochastique. Sur la base de la hiérarchie complète d'équations aux cumulants il a été possible de calculer l'amortissement irréversible et de montrer que l'irréversibilité stochastique se traduisait par ce mécanisme d'amortissement irréversible agissant sur le cumulant d'ordre le plus élevé.

2.2. Irréversibilité, Amortissement et Réalisabilité

L'introduction d'un terme d'amortissement irréversible dans les équations aux cumulants a déjà été proposée par Orszag (1970 et 1973) dans le cas de l'hypothèse de troncature à l'ordre 3 (ou hypothèse quasi-normale, Millionshchikov, 1941).

2.2.a. L'Approximation Quasi-Normale avec Amortissement Turbulent

Dans l'hypothèse quasi-normale les cumulants d'ordre 4 sont supposés nuls, c'est-à-dire que les moments d'ordre 4 sont reliés aux moments d'ordre 2 comme dans une distribution de probabilité gaussienne (cf. Eq.(1-19)). L'hypothèse quasi-normale est, tout au moins en turbulence homogène sans vitesse moyenne, l'hypothèse de troncature d'ordre le plus bas qui puisse être retenue puisque l'hypothèse de troncature à l'ordre deux ne prend en compte que la dissipation visqueuse (cf. Eq.(2-4)). L'hypothèse quasi-normale a été utilisée pour décrire la turbulence homogène et isotrope par Proudman et Reid (1954) et par Ogura (1962a, 1962b et 1963). Ogura et O'Brien et Francis (1963) ont en particulier montré numériquement que l'approximation quasi-normale conduisait à des aberrations physiques comme l'apparition d'énergies ou de variances négatives(*). Orszag (1970 et 1973) a pu démontrer analytiquement que cette violation de la positivité de l'énergie était due à une trop

(*) Cette particularité désastreuse de l'approximation quasi-normale ne se manifeste pas seulement en turbulence homogène et isotrope: en turbulence inhomogène les mêmes défauts existent.

grande mémoire, à viscosité nulle, des cumulants d'ordre trois et il a proposé, en coséquence, de couper cette mémoire par l'introduction d'un terme d'amortissement. Cette coupure de la mémoire des cumulants d'ordre trois correspond à l'introduction d'un amortissement turbulent dans leurs équations d'évolution. En effet, par intégration temporelle de l'équation (2-11) pour i=2 à viscosité nulle ($\alpha = 0$)

$$T^{(3)}(t) = \int_0^t T^{(2)}(s)\, T^{(2)}(s) \exp\left[-\int_s^t \mu_e^{(3)}(s')\, ds' \right] ds \quad , \qquad (2\text{-}16)$$

la mémoire du cumulant d'ordre trois est donnée par $\exp\left(-\int_s^t \mu_e^{(3)}(s')\, ds' \right)$. L'amortissement $\mu_e^{(3)}$ permet donc d'effacer, à l'instant t, la mémoire des instants s trop antérieurs alors que si il n'y a pas d'amortissement turbulent ($\mu_e^{(3)} = 0$) cette mémoire reste égale à 1 pour tous les instants antérieurs.

L'introduction d'un amortissement turbulent dans l'approximation quasi-normale permet donc de raccourcir la mémoire et en conséquence d'assurer la positivité de l'énergie. Cette dernière propriété de l'approximation quasi-normale avec amortissement turbulent peut être démontrée soit directement sur l'équation d'énergie (équation pour $T^{(2)}$, Orszag, 1973) soit indirectement en remarquant que l'équation d'énergie de cette approximation quasi-normale modifiée est identique à l'équation d'énergie d'un modèle stochastique comme le modèle de Langevin (Leith, 1971). Dans ce dernier cas on démontre ainsi que l'approximation quasi-normale avec amortissement turbulent assure la réalisabilité complète de l'écoulement, c'est-à-dire que non seulement l'énergie y reste positive mais aussi que les cumulants d'ordre trois y prennent des valeurs réalisables.

Au cours des dernières années l'approximation quasi-normale avec amortissement turbulent a été appliquée avec succès à de nombreux problèmes de turbulence homogène et isotrope. Dans cette hypothèse de fermeture le coefficient d'amortissement turbulent peut être choisi de différentes façons. Parmi celles-ci les méthodes de Edwards (1964) et Herring (1965 et 1966) utilisent des coefficients d'amortissement de structure analogue à $\mu_e^{(3)}$ (cf. Section VIII de [1]). Il est aussi possible de choisir l'amortissement sur des bases dimensionnelles (Orszag, 1970; Leith, 1971) ou en tenant compte de propriétés fines comme l'invariance galiléenne aléatoire ("Test-Field-Model" de Kraichnan, 1971).

L'approximation quasi-normale avec amortissement turbulent a été appliquée notamment à l'étude (en se limitant à la turbulence neutre sans champs électriques ni magnétiques(*)) :

- de la structure des zones inertielles en turbulence isotrope tridimensionnelle (Herring et Kraichnan, 1972; André et Lesieur, 1976) ;
- de la turbulence bidimensionnelle (Leith, 1971; Pouquet, Lesieur, André et Basdevant, 1975) ;
- de la décorrélation progressive de deux écoulements turbulents dont les états initiaux sont presque identiques (Leith, 1971; Leith et Kraichnan, 1972) .

Dans toutes ces études, cette hypothèse de fermeture s'est avérée capable de reproduire la presque totalité des phénomènes connus, aussi bien du point de vue qualitatif (Lesieur, 1973) que du point de vue quantitatif, à la condition que le coefficient d'amortissement soit judicieusement choisi. A cet égard le "Test-Field-Model" semble être actuellement la meilleure approximation quasi-normale avec amortissement turbulent disponible (Sulem, Lesieur et Frisch, 1975).

2.2.b. Les Hypothèses de Troncature à l'Ordre N avec Amortissement Turbulent

Les hypothèses de troncature d'ordre supérieur ou égal à 4 semblent posséder l'essentiel des défauts de l'approximation quasi-normale: ces hypothèses

- sont parfaitement réversibles dans le temps à viscosité nulle puisqu'elles se traduisent par un système composé d'un nombre fini d'équations réversibles, en contradiction avec l'irréversibilité stochastique (Orszag, 1973) ;
- n'assurent pas la réalisabilité de l'écoulement puisque, au moins à l'ordre 4 elles conduisent à l'apparition d'énergie négative (Tanaka, 1969) .

Bien qu'il n'ait pas été démontré que l'introduction d'un amortissement turbulent dans les hypothèses de troncature à l'ordre n ($n \geqslant 4$) réglait le problème de la réalisabilité, l'exemple de l'approximation quasi-normale suggère que l'introduction d'un mécanisme amortissant et irréversible est suffisant pour assurer cette réalisabilité , ou tout au moins pour assurer la positivité de l'énergie.

(*) L'approximation quasi-normale avec amortissement turbulent est également utilisée maintenant dans le domaine de la turbulence magnétohydrodynamique (Léorat, 1975).

2.3. Retour à l'Espace Physique

La transposition des résultats précédents, obtenus dans l'espace de Fourier, à l'espace physique pose de très nombreux problèmes. Tout d'abord, même s'il suffisait de faire agir la transformation de Fourier inverse sur ces résultats il est clair que cela correspondrait, dans l'espace physique, à d'inextricables opérateurs integro-différentiels. Il n'est que de considérer la transformée de Fourier inverse d'équations telles que (2-11) et (2-14) pour s'en convaincre! De plus, la notion simple d'amortissement turbulent est intimement liée à la forme diagonale de la covariance de vitesse dans l'espace de Fourier (cf. Eq.(2-9)). Cette forme diagonale est une caractéristique immédiate de la turbulence isotrope mais, dans le cas général inhomogène et anisotrope, cette représentation diagonale ne se conserve pas au cours du temps. En turbulence inhomogène il faudrait commencer par reformuler le problème afin d'obtenir une formulation indépendante de cette représentation. Une telle reformulation des équations est possible (Kraichnan, 1972) mais on se trouve alors confronté au premier type de difficultés, c'est-à-dire que cela correspond dans l'espace physique à des opérateurs intégro-différentiels inutilisables concrètement.

Nous essayerons donc, dans l'espace physique, d'utiliser simplement les concepts développés aux paragraphes 2.1. et 2.2., c'est-à-dire que nous chercherons une hypothèse de fermeture

- irréversible, pour être compatible avec l'irréversibilité statistique et stochastique;
- amortissante, pour tenir compte de l'interaction entre les cumulants d'ordres successifs;
- réalisable, pour ne pas conduire, par exemple, à des énergies ou variances négatives.

III. Le Problème de la Fermeture en Turbulence Inhomogène

Il existe dans la nature un très grand nombre de phénomènes pour lesquels la turbulence joue un rôle primordial. Ces phénomènes intéressent aussi bien la météorologie que l'océanographie, la physique des plasmas que l'astrophysique. Dans la presque totalité de ces cas la turbulence qui est mise en jeu est fondamentalement inhomogène en particulier à cause des stratifications diverses créées par la force de gravité. Dans ces conditions le recours aux théories de la turbulence homogène et isotrope n'est pas suffisant pour étudier complètement ces phénomènes, sauf peut-être en ce qui concerne l'atmosphère de grande échelle où la turbulence semble, en bonne approximation, être bidimensionnelle et homogène et isotrope (Morel et Larchevêque, 1974). Il est donc utile de développer les théories de la turbulence inhomogène et ceci dans un cadre suffisamment souple pour qu'il soit possible de traiter le plus grand nombre de situations. L'espace physique habituel semble, à cet égard, être le cadre adéquat pour traiter ces problèmes puisque l'utilisation de l'espace de Fourier rend difficile l'incorporation de conditions aux limites ou de caractères inhomogènes (cf. paragraphe 2.3.). Il n'en reste pas moins que l'étude, dans l'espace de Fourier, du cas idéal homogène et isotrope donne un éclairage extrêmement utile sur les mécanismes fondamentaux de la turbulence.

3.1. Les Théories de la Turbulence Inhomogène

3.1.a. Position du Problème

Nous nous restreindrons ici au cas d'un fluide incompressible ou au cas presque équivalent d'un fluide de Boussinesq, c'est-à-dire que nous supposerons, dans tous les cas, que l'écoulement turbulent est incompressible (Spiegel et Véronis, 1960; Mihaljan, 1962). Sous ces hypothèses les équations de la mécanique des fluides soumis à l'accélération de la pesanteur g s'écrivent:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = \alpha\, g\, T\, \delta_{3i} - \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu\, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (3\text{-}1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \qquad (3\text{-}2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial u_j T}{\partial x_j} = \lambda\, \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (3\text{-}3)$$

où, en plus des notations précédemment définies, T désigne la température, α le coefficient de dilatation (égal à $1/T_o$ dans le cas d'un gaz parfait avec T_o valeur caractéristique de la température) et λ la diffusivité thermique. Les fluides non dilatables se caractérisent dans ces conditions par $\alpha = 0$, ce qui découple les équations dynamiques (3-1) et (3-2) de l'équation thermodynamique (3-3).

Le traitement turbulent de ces équations dans l'espace ($\underline{x}$,t) entraîne, en plus du problème classique de la fermeture, un certain nombre de problèmes spécifiques déjà mentionnés au paragraphe 1.5.a.. Il faut en particulier évaluer des corrélations incluant des gradients de vitesse pour tenir compte des effets de la pression et de la viscosité. De plus, pour les fluides dilatables, de nouvelles corrélations incluant les fluctuations T' de température s'introduisent dans la hiérarchie d'équations. Ces dernières corrélations permettent de prendre en compte l'action des forces de flottabilité (différence entre la force d'Archimède et la force de pesanteur). Leur introduction ne complique guère, en fait, les problèmes de fermeture puisque nous leur appliquerons les mêmes méthodes qu'aux corrélations incluant les fluctuations de vitesse.

La présence de l'accélération de la pesanteur g dans les équations dynamiques (3-1) implique que, dans l'écoulement, la verticale est une direction privilégiée d'inhomogénéité. Par contre, dans un grand nombre de situations il est possible de supposer que la turbulence est homogène dans les plans horizontaux. Cette hypothèse est en particulier justifiée dès lors que l'échelle de longueur des variations horizontales de l'écoulement est supérieure à l'échelle de longueur

de ses variations verticales. Ceci se produit notamment au laboratoire dans la turbulence générée par une grille à la condition que l'on se place suffisamment en aval de la grille. De nombreuses situations naturelles (comme la turbulence dans la couche limite de l'atmosphère terrestre) satisfont aussi le critère d'homogénéité horizontale. Dans ces conditions le problème devient mathématiquement unidimensionnel (présence du seul opérateur de dérivation verticale $\partial/\partial x_3 \equiv \partial/\partial z$) mais il doit rester physiquement tridimensionnel(*).

3.1.b. Les Théories Classiques

En se restreignant à la turbulence horizontalement homogène, les équations d'évolution des paramètres moyens s'écrivent simplement:

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{u_i'w'}}{\partial z} + \alpha g \overline{T} \delta_{3i} - \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial z^2} \qquad (3\text{-}4)$$

$$\frac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} + \overline{w}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial z^2} \qquad (3\text{-}6)$$

où $\overline{w}$ désigne la vitesse verticale moyenne ($\overline{w} \equiv \overline{u_3}$). Dans tous les cas où il existe une frontière horizontale sur laquelle la vitesse verticale moyenne est nulle, l'équation (3-5) est remplacée par

$$\overline{w} = 0 \quad . \qquad (3\text{-}5^{bis})$$

Dans un premier type de théories, dites théories semi-empiriques ou théories à l'ordre "un et demi", les corrélations doubles sont exprimées à partir des gradients des quantités moyennes (comme en théorie des fluides visqueux) selon:

(*) Notons qu'il n'est pas nécessaire de faire l'hypothèse d'homogénéité horizontale pour que disparaissent formellement les opérateurs de dérivation horizontale $\partial/\partial x_1 \equiv \partial/\partial x$ et $\partial/\partial x_2 \equiv \partial/\partial y$. Il suffit en effet de considérer des opérateurs de moyenne sur des plans horizontaux (infinis). Dans ce cas l'homogénéité horizontale éventuelle du phénomène étudié implique que la structure verticale en tout point (x,y) est identique à la structure verticale moyenne.

$$\overline{u_i'w'} = -K_u \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial z} \quad ; \quad \overline{w'T'} = -K_T \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \quad . \qquad (3\text{-}7)$$

Malheureusement les coefficients de proportionalité K_u et K_T, appelés viscosités turbulentes et qui sont en toute rigueur fonction de l'écoulement, n'ont ni structure simple ni même signe constant dans la plupart des phénomènes naturels (cf. par exemple Starr, 1968; Deardorff, 1966). De plus des relations telles que (3-7) impliquent que les flux turbulents $\overline{u_i'w'}$ (tension de Reynolds) ou $\overline{w'T'}$ (flux turbulent cinématique de chaleur) s'annulent au maximum de vitesse ou dans des zones à température constante. Il est bien connu que cette dernière caractéristique est fausse pour des phénomènes aussi importants que les jets turbulents (Mathieu, 1959) ou la convection thermique (Deardorff, 1966). Des théories semi-empiriques plus élaborées telles que la théorie de la longueur de mélange (Prandtl, 1925) souffrent des mêmes défauts.

Il apparait donc nécessaire d'abandonner les théories semi-empiriques et pour cela il faut au moins considérer les équations d'évolution des corrélations doubles. Celles-ci s'écrivent (cf. entre autres Donaldson, 1973) :

$$\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial t} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{u_i'u_j'w'}}{\partial z} - \left(\overline{u_i'w'} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial z} + \overline{u_j'w'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial z} \right) + \alpha g \left(\overline{u_i'T'} \delta_{3j} + \overline{u_j'T'} \delta_{3i} \right)$$

$$- \frac{1}{\rho_o} \overline{\left(u_i' \frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right)} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i'u_j'}}{\partial z^2} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} \qquad (3\text{-}8)$$

$$\frac{\partial \overline{u_i'T'}}{\partial t} + \overline{w} \frac{\partial \overline{u_i'T'}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{u_i'w'T'}}{\partial z} - \left(\overline{u_i'w'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \overline{w'T'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial z} \right) + \alpha g \overline{T'^2} \delta_{3i}$$

$$- \frac{1}{\rho_o} \overline{T' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \nu \overline{T' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k \partial x_k}} + \lambda \overline{u_i' \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k \partial x_k}} \qquad (3\text{-}9)$$

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} + \overline{w} \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial z} = -\frac{\partial \overline{w'T'^2}}{\partial z} - 2 \overline{w'T'} \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \lambda \frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial z^2} - 2\lambda \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k}} \qquad (3\text{-}10)$$

L'hypothèse de troncature à l'ordre deux (c'est-à-dire nullité des corrélations triples) a été, à notre connaissance, assez peu utilisée si ce n'est par Egger (1975) dans le cas de la circulation zonale moyenne de l'atmosphère terrestre. En effet la nullité des corrélations triples implique, par exemple, que l'énergie cinétique produite en un endroit est dissipée sur place par la viscosité puisqu'il n'existe pas de terme de transport (analogie avec l'hypothèse de troncature à l'ordre deux dans l'espace de Fourier, cf. paragraphe 2.2.a.).

Les hypothèses de fermeture à l'ordre "deux et demi" (dites aussi hypothèses d'ordre élevé(*)) ont par contre connu un grand développement au cours des toutes dernières années (cf. entre autres Donaldson, 1973; Wyngaard, Coté et Rao, 1974; Lumley et Khajeh-Nouri, 1974; Launder, 1975; Launder, Reece et Rodi, 1975). Ces hypothèses portent aussi bien sur la structure des termes de pression que sur celle des termes de dissipation et sur les corrélations triples.

En ce qui concerne tout d'abord les termes de destruction moléculaire, ceux-ci sont généralement modelés en accord avec la notion d'isotropie des échelles dissipatives, c'est-à-dire

$$2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\varepsilon \qquad (3\text{-}11)$$

où ε est la dissipation d'énergie cinétique turbulente $\bar{e} = \frac{1}{2}\overline{u_i'u_i'}$. Cette dissipation peut être évaluée à partir de $\bar{e}$ et de la longueur caractéristique l des structures énergétiques, conformément aux idées de Kolmogorov (1941) :

$$\varepsilon = c_1 \frac{\bar{e}^{3/2}}{l} \quad . \qquad (3\text{-}12)$$

Elle peut aussi être calculée grâce à son équation d'évolution convenablement simplifiée (Tennekes et Lumley, 1972; Wyngaard et Coté, 1974). Il en est de même pour le taux de destruction moléculaire de la variance thermique $\overline{T'^2}$ qui peut être calculé

(*) La dénomination "hypothèse d'ordre élevé", bien qu'habituelle, est assez mauvaise si l'on se réfère au type d'hypothèses qui s'emploient actuellement en turbulence homogène et isotrope (cf. paragraphe 2.2.a.).

de façon dimensionnelle

$$2\lambda \overline{\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k}} = c_2 \overline{T'^2}\,\frac{\varepsilon}{\bar{e}} \qquad (3\text{-}13)$$

ou bien être calculé grâce à une équation d'évolution. Quant aux termes moléculaires de l'équation (3-9) ils sont le plus généralement négligés: une des raisons est qu'ils ne sont pas de signe constant.

Les corrélations entre fluctuation de vitesse ou de température et gradient de pression sont décomposées généralement en deux parties:

$$-\frac{1}{\rho_o}\overline{\left(u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j}+u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u_i'p'}\,\delta_{3j}+\overline{u_j'p'}\,\delta_{3i}\right)+\frac{1}{\rho_o}\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} \qquad (3\text{-}14)$$

$$-\frac{1}{\rho_o}\overline{T'\frac{\partial p'}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{p'T'}\,\delta_{3i}\right)+\frac{1}{\rho_o}\overline{p'\frac{\partial T'}{\partial x_i}} \quad . \qquad (3\text{-}15)$$

Les derniers termes des membres de droite de (3-14) et (3-15) sont alors exprimés sur la base des idées de retour à l'isotropie (Rotta, 1951). En effet un terme comme $\overline{p'\left(\partial u_i'/\partial x_j + \partial u_j'/\partial x_i\right)}$ est nul pour i=j sommés de 1 à 3, ce qui implique que ce terme ne peut que redistribuer l'énergie cinétique turbulente $\bar{e}$ entre ses trois composantes $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ et $\overline{w'^2}$. En conséquence Launder (1975) a proposé de prendre

$$\frac{1}{\rho_o}\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} = -c_4\,\mathcal{C}^{-1}\left(\overline{u_i'u_j'}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\,\bar{e}\right)-c_5\left(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}\,P\right) \qquad (3\text{-}16)$$

et, par analogie

$$\frac{1}{\rho_o}\overline{p'\frac{\partial T'}{\partial x_i}} = -c_6\,\mathcal{C}^{-1}\left(\overline{u_i'T'}\right)-c_7\,P_{iT} \qquad (3\text{-}17)$$

où $\mathcal{C}$ est un temps caractéristique que l'on peut identifier à $\bar{e}/\varepsilon$, P_{ij} est le

tenseur de production des tensions de Reynolds (somme du deuxième, troisième, quatrième et cinquième terme de (3-8)), P sa demi trace ($P = \frac{1}{2} P_{ii}$) et P_{iT} le terme de production du flux de chaleur $\overline{u_i'T'}$ (égal à la somme du troisième et quatrième terme de (3-9)).

Les premiers termes des membres de droite de (3-14) et (3-15), qui sont des termes de transport, peuvent être modelés comme tels en suivant la proposition de Donaldson (1973):

$$\frac{1}{\rho_o} \overline{p'u_i'} = - c_3 \frac{1}{\varepsilon^2} l \frac{\partial \overline{u_i'w'}}{\partial z} \qquad (3\text{-}18)$$

$$\frac{1}{\rho_o} \overline{p'T'} = - c_3 \frac{1}{\varepsilon^2} l \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z} \quad , \qquad (3\text{-}19)$$

mais ils peuvent aussi être modelés en même temps que les corrélations triples puisqu'ils jouent le même rôle (Lumley et Khajeh-Nouri, 1974).

En ce qui concerne enfin la modélisation des corrélations triples, celle-ci se fait le plus généralement en supposant que les transports turbulents se font depuis les régions "riches" vers les régions "pauvres". Cette idée, combinée avec des considérations d'invariance tensorielle, conduit à prendre (Donaldson, 1973; Wyngaard et Coté, 1974) :

$$\overline{fw'} = - c_8 \frac{1}{\varepsilon^2} l \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} \qquad (3\text{-}20)$$

où f est un produit de deux fluctuations quelconques.

Ces théories d'ordre élevé semblent capables de reproduire un certain nombre de phénomènes turbulents (Donaldson, 1973; Lewellen et Teske, 1973; Wyngaard et Coté, 1974). Elles présentent toutefois deux désavantages: d'une part elles font appel à un grand nombre de constantes numériques ajustables, ce qui est toujours gênant d'un point de vue théorique, et d'autre part elles reposent plus ou moins sur des notions de viscosité turbulente (cf. Eqs.(3-18), (3-19) et (3-20)). Cette deuxième caractéristique les empêche de décrire convenablement les corrélations triples car l'hypothèse de viscosité turbulente n'est pas plus justifiée en ce qui concerne les

corrélations triples qu'elle ne l'était en ce qui concerne les corrélations doubles (cf. Section 4).

3.2. L'Approximation d'"Ecrêtage" [2]

Les théories exposées au paragraphe précédent ne sont pas totalement satisfaisantes puisqu'en particulier elles font intervenir des hypothèses ad-hoc pour résoudre le problème central de la fermeture tel qu'il a été défini au paragraphe 1.1. et étudié à la Section 2. Nous allons donc essayer de traiter le problème de la fermeture en turbulence inhomogène sur la base des considérations développées à la Section 2. Nous conserverons, pour des raisons de simplicité, les hypothèses de fermeture concernant l'action de la pression et de la viscosité (Eqs.(3-11) à (3-19)) mais nous traiterons de façon plus systématique le problème central de la fermeture, c'est-à-dire le problème concernant l'expression des corrélations entre fluctuations de vitesse et/ou de température d'un certain ordre en fonction de ces mêmes corrélations d'ordre inférieur.

Il est nécessaire de décrire correctement les corrélations (ou cumulants) d'ordre trois car certaines d'entre elles ont une signification physique importante. En particulier $\overline{u'^2w'}$, $\overline{v'^2w'}$ et $\overline{w'^3}$ représentent les flux turbulents verticaux des trois composantes de l'énergie cinétique turbulente et ce sont eux qui transportent l'énergie cinétique turbulente depuis les régions productrices (qui sont assez souvent confinées près des frontières) vers les autres régions de l'écoulement. On est donc amené, comme hypothèse de fermeture, à considérer l'approximation quasi-normale (cf. paragraphe 2.2.a.)(*). Comme il a été mentionné plus haut, l'approximation quasi-normale ne peut pas être utilisée seule puisqu'elle entraine l'apparition d'énergies ou de variances négatives. Il faut donc lui adjoindre un mécanisme correcteur qui rétablisse la réalisabilité de l'écoulement. Ce mécanisme devra être aussi irréversible et amortissant, en accord avec les conclusions de la Section 2.

(*) Notons que l'emploi d'une hypothèse de troncature d'ordre supérieur ou égal à 4 rendra pratiquement impossibles les applications pratiques du fait du nombre considérable d'équations qu'il faudrait alors traiter. L'approximation quasi-normale représente, de ce point de vue, un compromis entre la complexité du système d'équations et la nécessité de bien décrire les corrélations d'ordre inférieur.

3.2.a. Les Conditions de Réalisabilité

L'apparition d'énergies ou de variances négatives dans l'approximation quasi-normale est due à une croissance trop importante des cumulants d'ordre trois (cf. le paragraphe 2.2.a. et plus particulièrement l'équation (2-16)). Il existe un mécanisme très simple qui limite les corrélations triples: les conditions de réalisabilité. Ces conditions peuvent être déduites très simplement de l'inégalité de Schwarz classique (Orszag et Kruskal, 1968; Blanchet, 1970) en considérant trois fluctuations turbulentes α', β' et γ'. Le cumulant d'ordre trois $\overline{\alpha'\beta'\gamma'}$ doit alors vérifier

$$\overline{\alpha'\beta'\gamma'}^2 = \overline{\alpha' \left(\beta'\gamma' - \overline{\beta'\gamma'} \right)}^2 \leq \overline{\alpha'^2} \left(\overline{\beta'^2\gamma'^2} - \overline{\beta'\gamma'}^2 \right) \quad . \qquad (3\text{-}21)$$

Il est clair qu'une inégalité telle que (3-21) empêche le cumulant d'ordre trois de dépasser une certaine valeur. La hiérarchie complète d'équations aux cumulants préserve évidemment des inégalités de réalisabilité comme (3-21) ou comme celles que l'on pourrait construire de la même façon pour des corrélations d'ordres différents. Par contre si l'on ferme la hiérarchie par l'approximation quasi-normale, il n'y a plus aucune raison pour que les équations ainsi obtenues préservent la nouvelle inégalité de réalisabilité qui s'obtient en appliquant aussi l'approximation quasi-normale à (3-21), c'est-à-dire

$$\overline{\alpha'\beta'\gamma'}^2 \leq \overline{\alpha'^2} \left(\overline{\beta'^2}.\overline{\gamma'^2} + \overline{\beta'\gamma'}^2 \right) \qquad (3\text{-}22)$$

ou, par symétrisation en α', β' et γ'

$$\left| \overline{\alpha'\beta'\gamma'} \right| \leq \text{Inf} \left\{ \begin{array}{l} \left[\overline{\alpha'^2} \left(\overline{\beta'^2}.\overline{\gamma'^2} + \overline{\beta'\gamma'}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} , \\ \left[\overline{\beta'^2} \left(\overline{\gamma'^2}.\overline{\alpha'^2} + \overline{\gamma'\alpha'}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} , \\ \left[\overline{\gamma'^2} \left(\overline{\alpha'^2}.\overline{\beta'^2} + \overline{\alpha'\beta'}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} . \qquad (3\text{-}23)$$

Par l'inégalité (3-23), si l'une quelconque des variances $\overline{\alpha'^2}$, $\overline{\beta'^2}$ ou $\overline{\gamma'^2}$ est nulle, il en résulte que $\overline{\alpha'\beta'\gamma'}$ est aussi nul. Ce mécanisme est suffisant en turbulence homogène et isotrope pour assurer que la variance nulle restera alors positive ou nulle, préservant par là la réalisabilité de l'écoulement (Orszag et Kruskal, 1968). Dans le cas de la turbulence inhomogène d'un fluide éventuellement dilatable, la présence de nombreuses causes d'évolution (cf. Eqs.(3-8) à (3-10)) ne permet pas de vérifier si l'inégalité (3-23) empêche l'apparition de variances négatives(*). On peut toutefois penser que ce mécanisme peut corriger en toute ou partie l'"irréalisabilité" de l'approximation quasi-normale.

Notons enfin que des inégalités de réalisabilité plus générales que (3-23) peuvent évidemment être construites, en particulier en s'appuyant sur le problème des moments (du Vachat, 1976).

3.2.b. Le Calcul des Cumulants d'Ordre Trois

Les considérations précédentes conduisent donc à prendre, dans l'espace physique, l'inégalité (3-23) comme mécanisme correcteur de l'approximation quasi-normale: c'est là le sens de l'approximation d'"écrêtage"(**). Dans cette approximation les équations d'évolution des cumulants d'ordre trois sont fermées grâce à l'hypothèse quasi-normale et on oblige chaque cumulant d'ordre trois à vérifier une inégalité telle que (3-23) (Sections 2 et 3 de [2]). Ceci peut être mis très facilement en oeuvre si l'on discrétise le système d'équations ainsi obtenues. Il suffit en effet de vérifier après chaque pas de temps que, en chaque point de grille, les cumulants d'ordre trois sont inférieurs à leur borne de réalisabilité donnée par (3-23). Si ce n'est pas le cas le cumulant d'ordre trois est alors corrigé en lui gardant son signe mais en lui affectant comme valeur absolue le second membre de (3-23).

(*) A notre connaissance la seule étude concernant le problème de la réalisabilité dans l'espace physique est celle de Schumann (1976) mais elle ne porte malheureusement que sur des théories de la turbulence homogène, ce qui, dans l'espace physique, revient en particulier à négliger la contribution des corrélations triples! (cf. Eqs.(3-8) à (3-10))

(**) Notons que Blanchet (1975) considère que l'approximation d'écrêtage ne peut pas être réduite à un simple mécanisme correcteur de l'approximation quasi-normale et qu'il lui attribue des propriétés plus fortes en liaison avec l'irréversibilité macroscopique.

3.2.c. Propriétés de l'Approximation d'"Ecrêtage"

L'hypothèse quasi-normale complétée par l'approximation d'écrêtage constitue une hypothèse de fermeture qui vérifie les conditions énoncées en conclusion de la Section 2. Elle est en effet trivialement irréversible dans le temps quelle que soit la valeur de la viscosité et elle amortit (de façon qui peut être discontinue dans le temps et dans l'espace) la croissance des cumulants d'ordre trois. Bien qu'il ne soit pas possible de le démontrer dans le cas général, nous constaterons à la Section 4 qu'elle préserve la réalisabilité de l'écoulement.

La mise en oeuvre numérique de l'hypothèse quasi-normale complétée par l'approximation d'écrêtage est relativement aisée et le système d'équations qui lui correspond reste d'une complexité raisonnable. A titre d'exemples, pour un écoulement unidirectionnel d'un fluide non dilatable en régime turbulent horizontalement homogène, il faut considérer un système de 9 équations et 4 inégalités pour:

- la vitesse moyenne unidirectionnelle;
- les trois composantes de l'énergie cinétique turbulente et pour le flux turbulent de quantité de mouvement;
- les trois flux turbulents des composantes de l'énergie cinétique et la corrélation triple représentant la diffusion turbulente du flux de quantité de mouvement.

Dans le cas de l'écoulement sans vitesse moyenne d'un fluide dilatable il faut considérer un système de 11 équations et 6 inégalités pour:

- la température moyenne;
- les deux composantes (horizontale et verticale) de l'énergie cinétique, le flux de chaleur et la variance thermique;
- six corrélations triples parmi lesquelles les quatre flux turbulents des quatre corrélations doubles précédentes.

Dans le cas tout à fait général il faut alors considérer un système de 26 équations et 14 inégalités pour:

- trois quantités moyennes (Eqs.(3-4), (3-5bis) et (3-6));
- neuf corrélations doubles (cinq équations (3-8), trois équations (3-9) et une équation (3-10));
- quatorze corrélations triples.

Il reste toutefois à tester la validité et la précision de l'approximation d'écrêtage sur un certain nombre de situations expérimentales bien connues et à vérifier que cette hypothèse de fermeture permet de retrouver les rares résultats bien établis en turbulence inhomogène.

IV. Application à Trois Expériences de Turbulence Inhomogène

Afin de juger de la valeur de l'hypothèse quasi-normale complétée par l'approximation d'écrêtage comme hypothèse de fermeture en turbulence inhomogène, nous avons retenu trois situations tests. Ces situations correspondent soit

- à une loi expérimentale pour laquelle il existe une explication satisfaisante: la loi logarithmique (Paragraphe 4.2.);
- à une expérience de laboratoire où les diverses quantités turbulentes ont été mesurées avec soin et de façon relativement exhaustive: la convection pénétrante dans une cuve remplie d'eau (Paragraphe 4.3.);
- enfin à un cas réel d'intérêt pratique considérable: la turbulence dans la couche limite de l'atmosphère terrestre (Paragraphe 4.4.).

Ces trois cas tests présentent de plus l'avantage de correspondre à une gradation dans la complexité des phénomènes impliqués. Dans le premier cas seules les caractéristiques hydrodynamiques entrent en jeu, à l'exclusion de tout phénomène thermique; dans le second cas l'étude est centrée sur les phénomènes de transport de chaleur sans turbulence d'origine dynamique et enfin, dans le dernier cas, les deux types de phénomènes sont intimement mélangés.

Dans chacun de ces cas une difficulté provient du nombre relativement élevé d'équations aux dérivées partielles qu'il faut traiter simultanément. Comme ces équations sont du premier ordre dans le temps et dans l'espace cela signifie qu'il faudra considérer un grand nombre de conditions initiales et de conditions aux limites. Il est toutefois possible, en choisissant judicieusement les schémas de discrétisation numérique, de réduire quelque peu le nombre de ces conditions.

4.1. Les Méthodes Numériques

Avant d'aborder la description de ces trois expériences, il est utile de décrire rapidement les méthodes numériques mises en oeuvre puisque celles-ci seront les mêmes dans les trois cas.

4.1.a. La Grille Spatiale et les Conditions aux Limites

Un examem des équations (3-4), (3-6), (3-8), (3-9) et (3-10) suggère qu'un processus important est la diffusion turbulente verticale représentée par les premiers termes des membres de droite des équations précédentes. Il semble donc judicieux de distribuer les diverses corrélations (ou cumulants) sur des niveaux imbriqués, conformément à leurs ordres respectifs: les cumulants des premier et troisième ordres seront exprimés sur des niveaux d'indice entier, ceux du second ordre sur des niveaux d'indice fractionnaire (Figure 1).

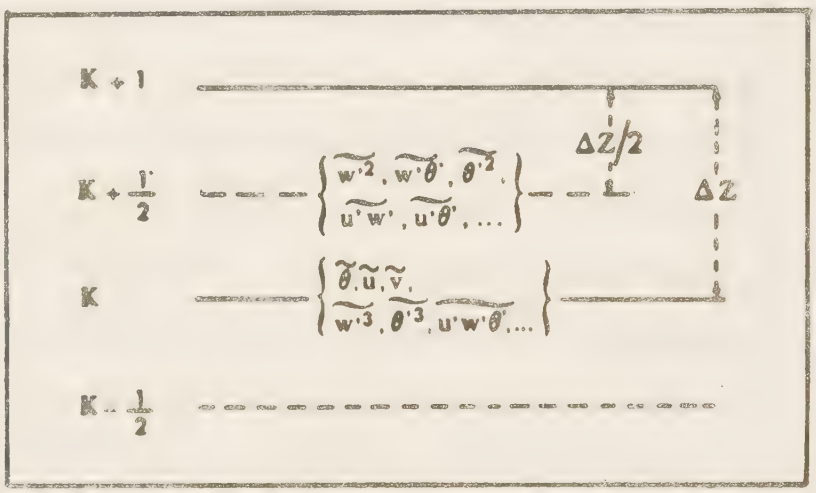

Figure 1 : La Grille Spatiale.

Avec une telle grille l'équation d'évolution d'un cumulant d'ordre i ($1 \leqslant i \leqslant 3$), exprimée au niveau K, fait apparaître:

- des dérivées de cumulants d'ordre (i+1) ou (i-1), qui seront calculées par application de l'opérateur de différences centrées entre les niveaux $(K+\frac{1}{2})$ et $(K-\frac{1}{2})$;
- des dérivées de cumulants d'ordre i, qui seront calculées en appliquant ce même opérateur entre les niveaux (K+1) et (K-1);
- des cumulants d'ordre (i+1) ou (i-1), dont la valeur sera prise égale à la moyenne arithmétique de leurs valeurs respectives aux niveaux $(K+\frac{1}{2})$ et $(K-\frac{1}{2})$.

A la frontière inférieure, le premier niveau sera toujours un niveau d'indice fractionnaire ($K=\frac{1}{2}$) où les cumulants d'ordre deux seront donnés en accord avec les conditions aux limites correspondant au problème étudié. Il sera alors possible de calculer les cumulants d'ordre un et trois au niveau immédiatement supérieur ($K=1$) grâce à leurs équations d'évolution respectives. Il est clair qu'avec une telle grille spatiale le nombre de conditions aux limites à adjoindre au système est notablement réduit.

A la frontière supérieure, le dernier niveau sera toujours un niveau d'indice fractionnaire ($K=N+\frac{1}{2}$). Deux cas peuvent alors se présenter selon que le phénomène étudié présente ou non une symétrie par rapport au niveau horizontal N. Si il y a symétrie, celle-ci sera utilisée pour calculer les différentes dérivées ou valeurs moyennes des divers cumulants à ce dernier niveau. Dans le cas contraire le schéma de différentiation spatiale sera légèrement modifié puisque, lorsque nécessaire, des dérivées "en arrière" seront utilisées à la place des dérivées centrées, ceci pour éviter la réflexion sur le niveau supérieur.

Nous utiliserons des modèles numériques dits à N niveaux, c'est-à-dire tels que $\frac{1}{2} \leqslant K \leqslant N+\frac{1}{2}$ (en général N sera égal à 50 ou 60). Le pas d'espace Δz sera défini par $\Delta z = \left[\text{Altitude du niveau K}\right] - \left[\text{Altitude du niveau (K-1)}\right]$.

4.1.b. Le Schéma d'Intégration Temporelle

Dans tous les cas où les phénomènes thermiques sont présents (Paragraphes 4.3. et 4.4.), il existe des ondes de gravité internes à l'intérieur de l'écoulement turbulent (cf. par exemple Haltiner, 1971). La plus grande pulsation ω_{Max} de ces ondes est égale au triple de la pulsation de Brunt-Vaïsala (André et Lacarrère, 1975)

$$\omega_{Max} = 3 \left(-\alpha g \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \qquad (4\text{-}1)$$

Dans le cas de statification thermique stable ($\partial\overline{T}/\partial z \geqslant 0$) ces ondes de gravité internes sont stables et leur plus petite période T_{min} est donnée par:

$$T_{min} = \frac{2\pi}{3} \left(\alpha g \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad . \qquad (4\text{-}2)$$

Cette période T_{min} peut être extrèmemnt courte, en particulier dans les régions à fort gradient positif de température qui surmontent presque toujours les couches turbulentes. En conséquence nous avons retenu le schéma de discrétisation temporelle dit de Matsuno qui est bien connu pour ses propriétés d'amortissement vis-à-vis de telles oscillations (Lilly, 1965; André et Lacarrère, 1975). Dans l'expérience purement dynamique (cf. paragraphe 4.2.) nous utiliserons encore ce même schéma de Matsuno.

4.1.c. Les Conditions Initiales

Les propriétés d'adaptation du modèle numérique et sa courte mémoire temporelle permettent de prendre comme conditions initiales un état extrèmement simple mais sans grande signification physique. Cet état initial est caractérisé dans tous les cas par des profils verticaux pour les paramètres moyens (cumulant du premier ordre) et par des cumulants d'ordre deux et trois nuls à travers tout l'écoulement, sauf en ce qui concerne les cumulants d'ordre deux au niveau $K=\frac{1}{2}$ où ceux-ci sont pris en accord avec les conditions aux limites physiques (cf. paragraphe 4.1.a.). Un tel état présente l'avantage de la simplicité la plus totale et d'être solution "presque" stationnaire des équations. Nous verrons au paragraphe 4.3.b. que l'approximation d'écrêtage permet en outre de corriger, au cours d'une phase d'adaptation, les incohérences physiques dues à des conditions initiales aussi grossières (Section 6 de [3]).

4.2. La Loi Logarithmique

Une des rares certitudes en turbulence inhomogène concerne le profil de la vitesse moyenne unidirectionnelle $\bar{u}(z)$ d'un fluide non dilatable à l'intérieur d'un canal ou d'un tube de longueur suffisante pour que l'écoulement soit stationnaire et homogène suivant l'axe du tube ou du canal.

La théorie dimensionnelle d'un tel écoulement a été établie essentiellement grâce aux travaux de Millikan (1939). Elle repose sur le fait que près de la paroi (z=0) la vitesse doit être déterminée en fonction d'un seul nombre sans dimensions z_+:

$$\bar{u}(z) = u_* f_1(z_+) \quad ; \quad z_+ = \frac{z u_*}{\nu} \tag{4-3}$$

où u_* est la tension à la paroi ($u_*^2 = (\nu \partial\bar{u}/\partial z)_{z=0}$), alors qu'au centre de l'écoulement le gradient de vitesse doit être simplement fonction du nombre sans dimensions η

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}(z) = \frac{u_*}{h} f_2(\eta) \quad ; \quad \eta = \frac{z}{h} \tag{4-4}$$

où h désigne la demi hauteur du canal (ou le demi diamètre du tube). Si il existe une zone dans laquelle les lois universelles (4-3) et (4-4) sont simultanément valides, la vitesse moyenne doit alors y suivre un profil logarithmique (cf. par example Monin et Yaglom, 1971; Tennekes et Lumley, 1972) :

$$\frac{\bar{u}(h) - \bar{u}(z)}{u_*} = -\frac{1}{\kappa} \mathrm{Log} \frac{z}{h} + B_1 \tag{4-5}$$

où κ (constante de von Karman) et B_1 sont des constantes universelles.

Des expériences de laboratoire (cf. entre autres Laufer, 1951 et 1954; Comte-Bellot, 1965; Hussain et Reynolds, 1975) ont permis de tester la validité de cette loi; elles ont permis de déterminer en particulier la constante de von Karman ($\kappa \# 0{,}4$) et elles ont de plus montré que le profil logarithmique (4-5) était applicable jusqu'à des nombres sans dimensions η assez élevés.

A titre de premier test, l'hypothèse quasi-normale complétée par l'approximation d'écrêtage va être utilisée pour décrire l'écoulement dans un canal de demi hauteur h et pour tenter de retrouver la loi logarithmique (4-5).

4.2.a. Le Système d'Equations

Comme il a été indiqué à la Section 3 le système d'équations correspondant à l'hypothèse quasi-normale complétée par l'approximation d'écrêtage se compose dans ce cas de 9 équations et 4 inégalités. Les équations pour les cumulants d'ordre un et deux s'écrivent (cf. Eqs.(3-4), (3-5bis) et (3-8)) :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \frac{1}{\rho_o}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} \qquad (4\text{-}6)$$

$$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u'w'^2}}{\partial z} - (1-c_5)\,\overline{w'^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - c_1 c_4 \frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{1}\overline{u'w'} + c_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{e}^{\frac{1}{2}}\, 1 \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right) \qquad (4\text{-}7)$$

$$\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u'^2 w'}}{\partial z} - (2-\frac{4}{3}c_5)\,\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - c_1 c_4 \frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{1}\left(\overline{u'^2} - \frac{2}{3}\overline{e}\right) - \frac{2}{3} c_1 \frac{\overline{e}^{3/2}}{1} \qquad (4\text{-}8)$$

$$\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{v'^2 w'}}{\partial z} - \frac{2}{3} c_5\, \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - c_1 c_4 \frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{1}\left(\overline{v'^2} - \frac{2}{3}\overline{e}\right) - \frac{2}{3} c_1 \frac{\overline{e}^{3/2}}{1} \qquad (4\text{-}9)$$

$$\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'^3}}{\partial z} - \frac{2}{3} c_5\, \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - c_1 c_4 \frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{1}\left(\overline{w'^2} - \frac{2}{3}\overline{e}\right) - \frac{2}{3} c_1 \frac{\overline{e}^{3/2}}{1}$$

$$+ 2 c_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{e}^{\frac{1}{2}}\, 1 \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right) \qquad (4\text{-}10)$$

A ce niveau nous avons négligé les termes dus à la diffusion visqueuse et ceci afin de nous placer dans le cas limite du nombre de Reynolds infini. La dérivée horizontale de la pression moyenne qui apparait dans l'équation (4-6) est constante selon la verticale puisque, par suite de la seule homogénéité horizontale, les trois composantes du gradient de pression ($\partial\overline{p}/\partial x$, $\partial\overline{p}/\partial y$ et $\partial\overline{p}/\partial z$) doivent être seulement fonction de l'altitude z. La longueur 1 qui intervient dans ce problème et qui doit être

l'échelle de longueur des structures énergétiques est évidemment égale à la demi-hauteur h du canal. Les différentes constantes c_1, c_3, c_4 et c_5 qui apparaissent dans les équations (4-7) à (4-10) et qui proviennent respectivement de la paramétrisation de la dissipation visqueuse (Eq.(3-12)), du transport par les forces de pression (Eq.(3-18)) et de la redistribution de l'énergie cinétique turbulente par la pression (Eq.(3-16)) sont prises conformément à

$$c_1 = 1,6 \quad ; \quad c_3 = -0,00275 \quad ; \quad c_4 = 4,5 \quad ; \quad c_5 = 0 \quad . \quad (4\text{-}11)$$

Ces valeurs proviennent d'un compromis entre des estimations basées sur des résultats expérimentaux (Launder, 1975) et d'un ajustement empirique effectué afin d'obtenir des résultats numériques satisfaisants. Quoiqu'il en soit la valeur précise de ces diverses constantes est relativement peu importante, ainsi que cela sera montré au paragraphe 4.2.c..

Les équations pour les quatre cumulants d'ordre trois $\overline{u'w'^2}$, $\overline{u'^2w'}$, $\overline{v'^2w'}$ et $\overline{w'^3}$ s'obtiennent facilement à partir de l'équation (3-1) en appliquant l'approximation quasi-normale et l'hypothèse d'homogénéité horizontale (pour simplifier nous négligerons dans ces équations l'action des fluctuations de pression et de la viscosité). Les conditions de réalisabilité pour ces cumulants d'ordre trois s'obtiennent par spécialisation de l'inégalité (3-23) de telle sorte que le système décrivant l'évolution de ces quatre quantités s'écrit

$$\frac{\partial \overline{u'w'^2}}{\partial t} = - \overline{u'w'} \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} - 2 \overline{w'^2} \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \overline{w'^3} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \quad (4\text{-}12)$$

$$\left| \overline{u'w'^2} \right| \leqslant \left[\overline{w'^2} \left(\overline{u'^2}.\overline{w'^2} + \overline{u'w'}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4\text{-}12^{bis})$$

$$\frac{\partial \overline{u'^2w'}}{\partial t} = - \overline{w'^2} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial z} - 2 \overline{u'w'} \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - 2 \overline{u'w'^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \quad (4\text{-}13)$$

$$\left| \overline{u'^2w'} \right| \leqslant \left[\overline{u'^2} \left(\overline{u'^2}.\overline{w'^2} + \overline{u'w'}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4\text{-}13^{bis})$$

$$\frac{\partial \overline{v'^2 w'}}{\partial t} = -\overline{w'^2}\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial z} \qquad (4\text{-}14)$$

$$\left| \overline{v'^2 w'} \right| \leqslant \overline{v'^2}\ \overline{w'^2}^{\frac{1}{2}} \qquad (4\text{-}14^{bis})$$

$$\frac{\partial \overline{w'^3}}{\partial t} = -3\,\overline{w'^2}\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \qquad (4\text{-}15)$$

$$\left| \overline{w'^3} \right| \leqslant \left(2\,\overline{w'^2}^3 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (4\text{-}15^{bis})$$

Comme condition initiale particulière à ce problème nous prendrons une vitesse $\overline{u}(z)$ constante à travers toute la section du canal. Afin de ne pas trop perturber le système numérique, le gradient de pression constant $-\partial\overline{p}/\rho_o \partial x$ sera amené graduellement d'une valeur nulle à l'instant initial jusqu'à une valeur constante dans le temps après un temps d'adaptation t_a ($t_a \sim 5\ h/u_*$). Les conditions à la limite supérieure (niveau $K=N+\frac{1}{2}$ d'altitude $z=h$) seront exprimées grâce à la symétrie de l'écoulement de part et d'autre de cette altitude. La condition à la limite inférieure (niveau $K=\frac{1}{2}$ d'altitude $z=\Delta z/2$) sur le flux de quantité de mouvement $\overline{u'w'}$ peut être reliée à l'intensité du gradient de pression par intégration verticale de l'équation (4-6):

$$\overline{u'w'}(\Delta z/2) = \frac{h-(\Delta z/2)}{\rho_o}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} = -u_*^2\left(1 - \frac{\Delta z}{2h}\right) \quad , \qquad (4\text{-}16)$$

ce qui définit la vitesse de frottement u_*. Quant aux autres conditions à la limite inférieure elles sont prises conformément à la théorie dimensionnelle décrite plus haut:

$$\overline{u'^2}(\Delta z/2) = a_1\, u_*^2 \quad ; \quad a_1 = 5{,}5 \qquad (4\text{-}17)$$

$$\overline{v'^2}(\Delta z/2) = a_2\, u_*^2 \quad ; \quad a_2 = 2{,}0 \qquad (4\text{-}18)$$

$$\overline{w'^2}(\Delta z/2) = a_3\, u_*^2 \quad ; \quad a_3 = 0{,}8 \qquad (4\text{-}19)$$

avec a_1, a_2 et a_3 donnés directement d'après les mesures en laboratoire de Comte-Bellot (1965).

Le modèle numérique utilisé est un modèle à 40 niveaux ($\frac{1}{2} \leqslant K \leqslant 40+\frac{1}{2}$) qui est donc caractérisé par un pas d'espace $\Delta z = 2h/81$. Le pas de temps Δt retenu est alors $\Delta t = 1{,}3\ 10^{-3}\ h/u_*$.

4.2.b. Les Résultats Numériques

Dans cette expérience numérique le modèle développe des valeurs "réalistes" des diverses quantités turbulentes au bout d'un temps égal à environ deux fois le temps d'adaptation t_a. Toutefois, pour se placer dans les conditions d'obtention de la loi logarithmique il faut que les divers paramètres soient stationnaires et pour cela il est nécessaire d'attendre approximativement 10 t_a (*). A ce moment le profil de la vitesse moyenne $\overline{u}(z)$ est bien stationnaire et il est alors possible de représenter la quantité $(\overline{u}(h)-\overline{u}(z))/u_*$ en fonction de la coordonnée réduite z/h (Figure 2). Conformément aux conditions pour lesquelles elle a été obtenue il ne faut considérer que les points les plus proches de la paroi ($\eta = z/h$ petit) pour tester la validité de la loi logarithmique. En ne retenant que les dix premiers points de notre modèle, c'est-à-dire $\eta \leqslant 0{,}25$ (cf. Monin et Yaglom, 1971 ou Tennekes et Lumley, 1972 pour le choix de cette borne supérieure de η), il est possible de bien représenter le défaut de vitesse $(\overline{u}(h)-\overline{u}(z))/u_*$ en fonction du logarithme de l'altitude réduite par une droite dont la pente est égale à $2{,}44 \pm 0{,}04$. Cette valeur est égale à l'inverse de la constante de von Karman qui est donc donnée par

$$K = 0{,}410 \pm 0{,}007 \quad . \qquad (4\text{-}20)$$

Cette valeur est compatible avec les valeurs expérimentales de Laufer (1951 et 1954) et de Comte-Bellot (1965) et elle correspond bien à la valeur $K = 0{,}41$ recommandée

(*) Les résultats numériques que nous présentons à ce paragraphe sont en fait des moyennes sur un intervalle de temps de quelques t_a . En effet le terme de presso-diffusion qui agit comme une "anti-viscosité" ($c_3 < 0$, Eq.(4-11)) donne naissance à des oscillations qui sont ensuite propagées dans le modèle numérique du fait du schéma en différences centrées (cf. paragraphe 4.1.a.). C'est ce qui rend nécessaire les moyennes temporelles au niveau de la sortie des résultats numériques.

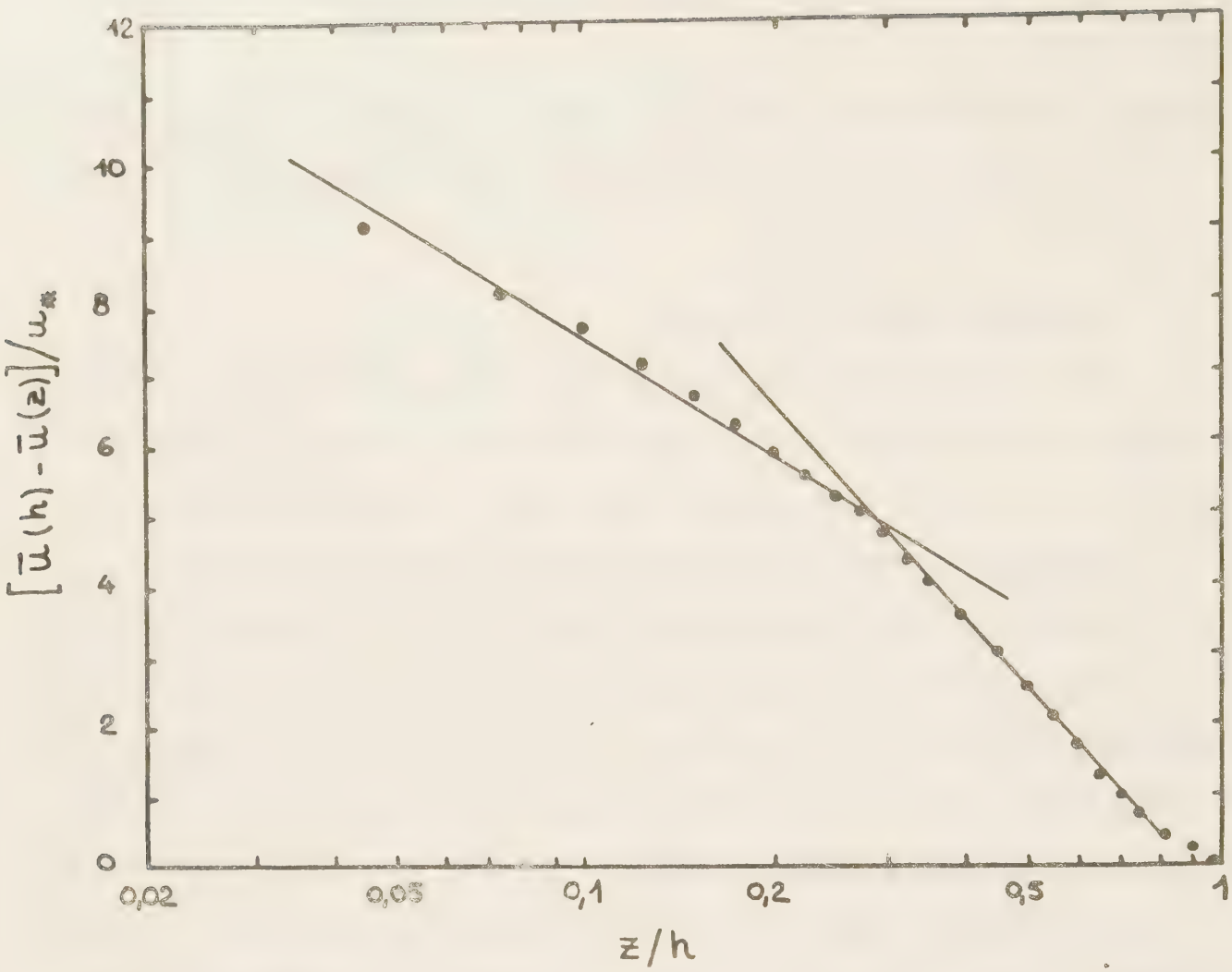

Figure 2 : Représentation logarithmique de la vitesse moyenne.

par Clauser (1956)(*). Pour des altitudes réduites plus proches de 1 il semble encore possible d'utiliser une loi logarithmique pour décrire le profil de la vitesse moyenne. Toutefois, la pente de cette nouvelle droite doit dans ce cas être considérée comme une constante empirique (et non plus universelle) et un ajustement entre les altitudes réduites $\eta = 0,25$ et $\eta = 0,80$ donne alors une pente d'environ 4,4 . On notera ici le bon accord entre nos résultats numériques et les résultats expérimentaux de Comte-Bellot (1965).

(*) Notons que sur la base des lois de similitude dans la couche limite de surface de l'atmosphère terrestre (cf. paragraphes 4.3.a. et 4.4.a.) Businger, Wyngaard, Izumi et Bradley (1971) ont proposé une constante de von Karman de 0,35. Cette valeur de 0,35 a été déterminée par interpolation des lois universelles au voisinage du point de stabilité thermique nulle et a donc été obtenue de façon indirecte à partir d'estimations entâchées d'erreur. C'est pourquoi il semble préférable de retenir pour la constante de von Karman une valeur déduite directement de la mesure du profil de vitesse.

Le flux turbulent de quantité de mouvement $\overline{u'w'}$, normalisé par le carré de la vitesse de frottement u_*, est représenté à la figure 3. On constate, en accord avec l'équation (4-6) dans le cas stationnaire, que $\overline{u'w'}$ croît linéairement depuis la limite inférieure (Eq.(4-16)) jusqu'au centre de l'écoulement où il s'annule pour des raisons de symétrie.

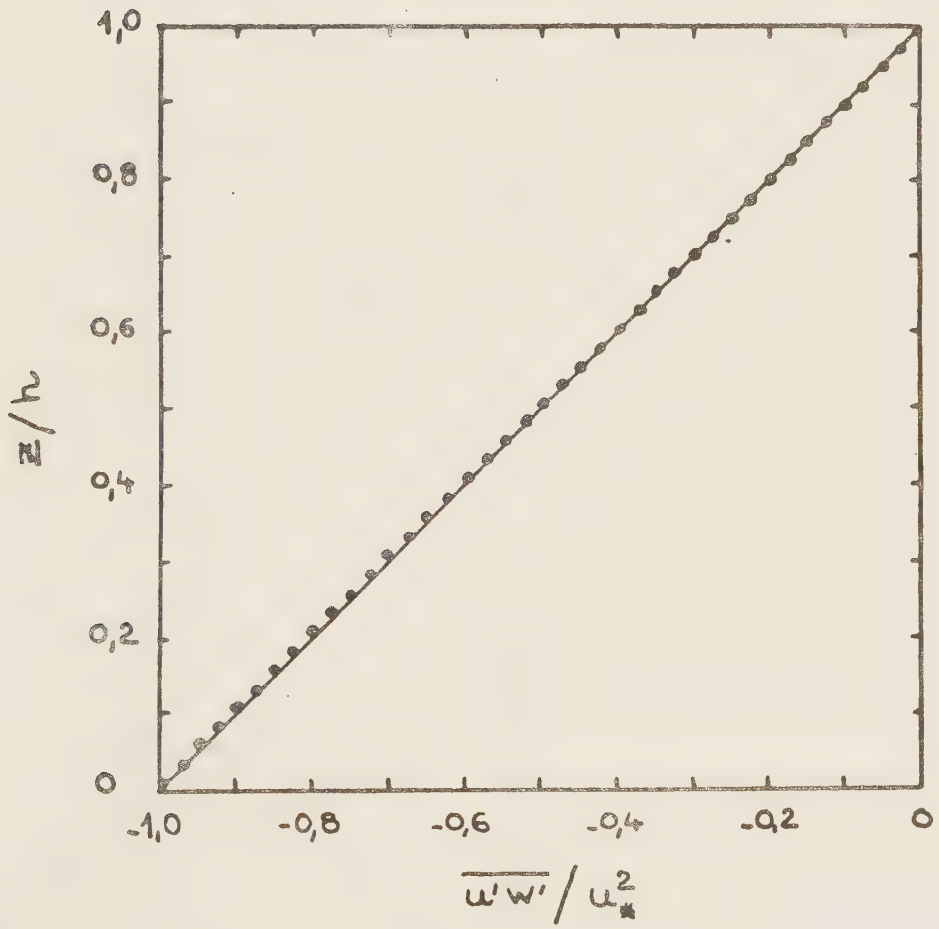

Figure 3 : Flux turbulent de quantité de mouvement.

Les mécanismes de production du flux turbulent de quantité de mouvement $\overline{u'w'}$ sont indiqués à la figure 4. Sur cette figure sont représentés, normalisés par u_*^2/h, les différents termes intervenant dans l'équation pour $\overline{u'w'}$ (Eq.(4-7)). On y constate que la plus grande partie de la production de flux turbulent ($-\overline{w'^2}\,\partial\bar{u}/\partial z$) est concentrée près de la paroi et que le terme de diffusion turbulente ($-\partial\overline{u'w'^2}/\partial z$) exporte le flux de quantité de mouvement vers le centre de l'écoulement. Le terme de presso-diffusion ($c_3\,\partial/\partial z\,(\overline{e^2}^{\frac{1}{2}}\,h\,\partial\overline{u'w'}/\partial z)$) a une contribution négligeable au bilan de $\overline{u'w'}$ tandis que l'action de la pression ($c_5\,\overline{w'^2}\,\partial\bar{u}/\partial z - c_1c_4\,\overline{e^2}^{\frac{1}{2}}\,\overline{u'w'}/h$) a pour effet d'amortir, à peu près linéairement, la croissance de $\overline{u'w'}$.

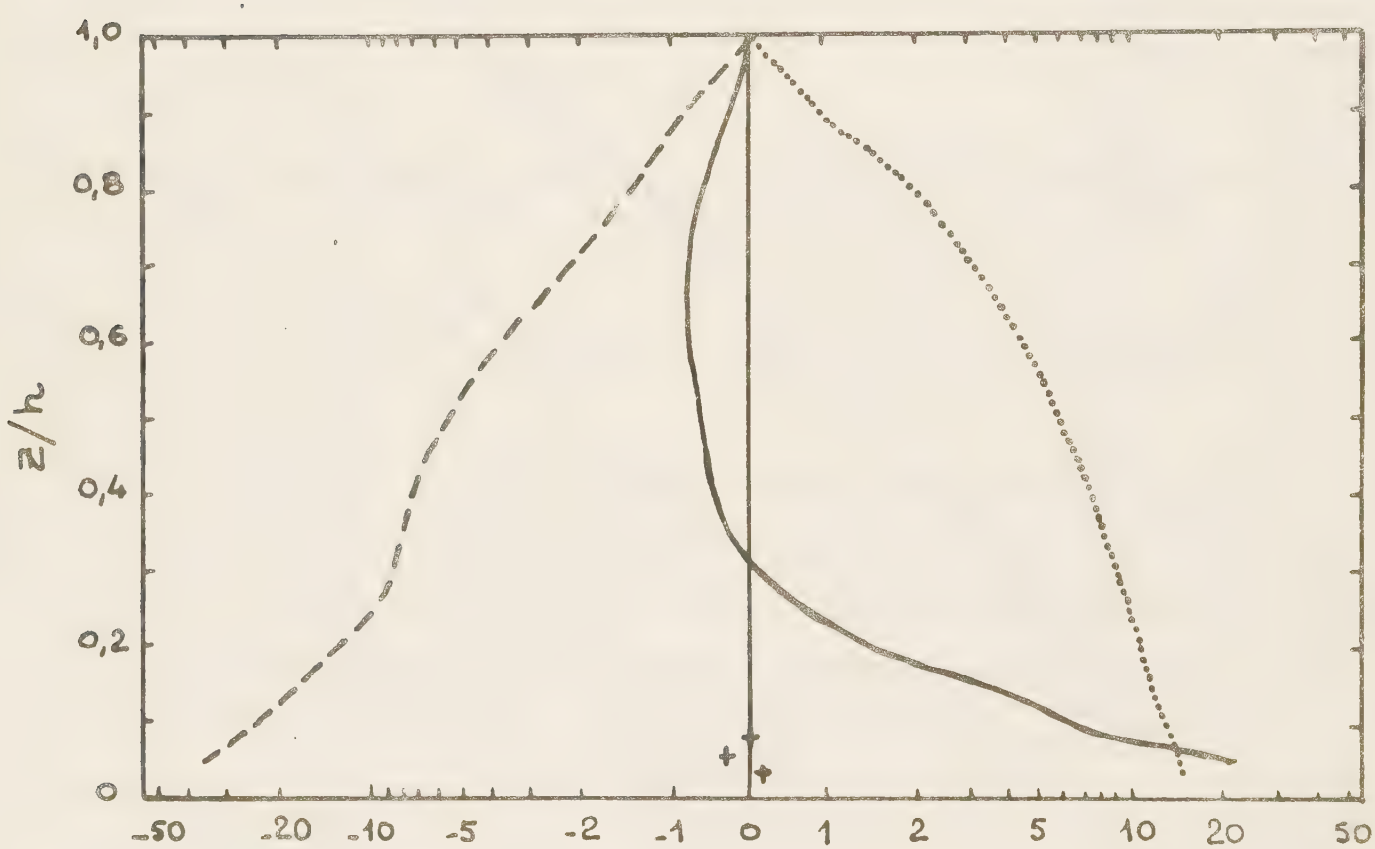

Figure 4 : Bilan du flux turbulent de quantité de mouvement.

———, diffusion turbulente; ....., effet des fluctuations de pression; - - - -, production; + + + +, presso-diffusion. Noter le changement d'échelle (linéaire-logarithmique) à $z/h = -1$ et $+1$.

L'énergie cinétique turbulente $\bar{e}$, normalisée par u_*^2, est représentée à la figure 5 en fonction de la coordonnée réduite η. On y constate une diminution de $\bar{e}$ depuis la paroi vers l'axe de symétrie de l'écoulement et les résultats numériques sont en assez bon accord avec les résultats expérimentaux de Comte-Bellot (1965).

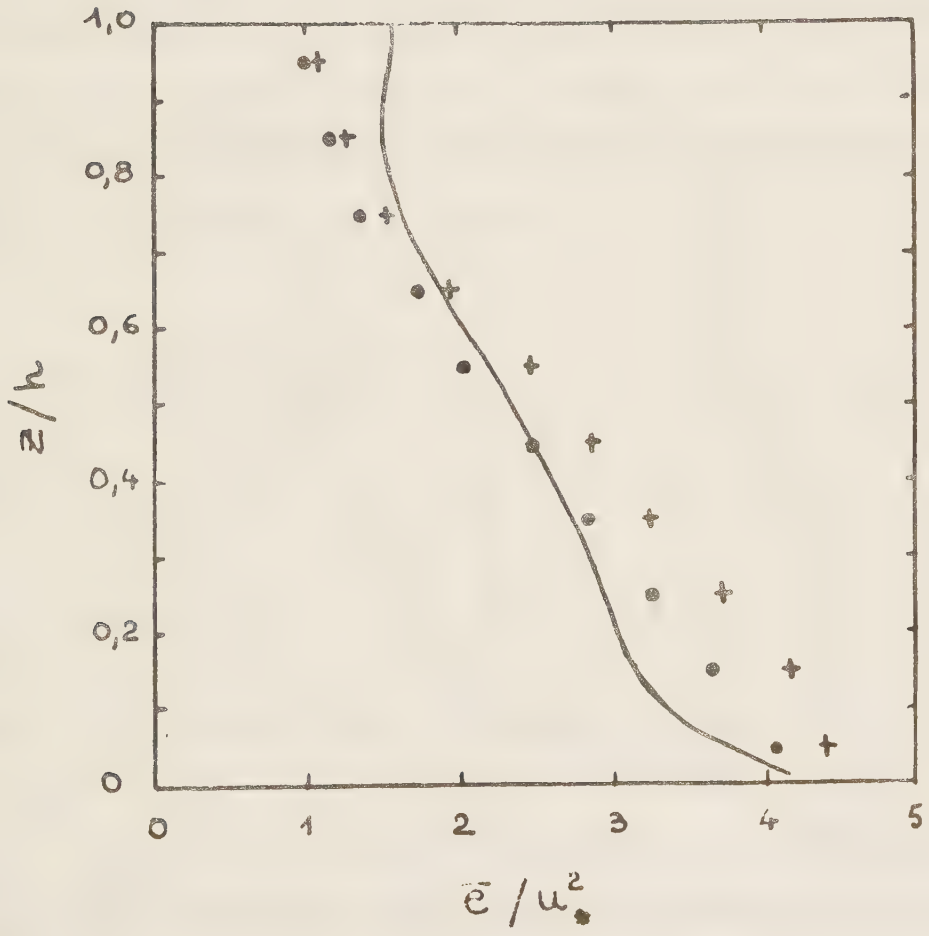

Figure 5 : Energie cinétique turbulente.
La courbe en trait plein représente les résultats numériques et les points (resp. les croix) représentent les résultats expérimentaux de Comte-Bellot (1965) à un nombre de Reynolds de 120 000 (resp. 230 000).

Le bilan de l'énergie cinétique turbulente, représenté par la somme des équations (4-8) à (4-10)

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'e}}{\partial z} - \overline{u'w'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - c_1 \frac{\bar{e}^{3/2}}{h} + c_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{e}^{\frac{1}{2}} h \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right) \qquad (4\text{-}21)$$

où $\overline{w'e} = \frac{1}{2}\left(\overline{u'^2 w'} + \overline{v'^2 w'} + \overline{w'^3} \right)$, est représenté à la figure 6. Les différents termes de l'équation (4-21) y sont normalisés par u_*^2/h et l'on peut constater que la production d'énergie cinétique ($-\overline{u'w'}\,\partial\bar{u}/\partial z$) est, comme c'est naturel, importante vers la paroi alors que la diffusion turbulente ($-\partial\overline{w'e}/\partial z$) transporte cette énergie vers le centre de l'écoulement. C'est ce terme de diffusion turbulente qui

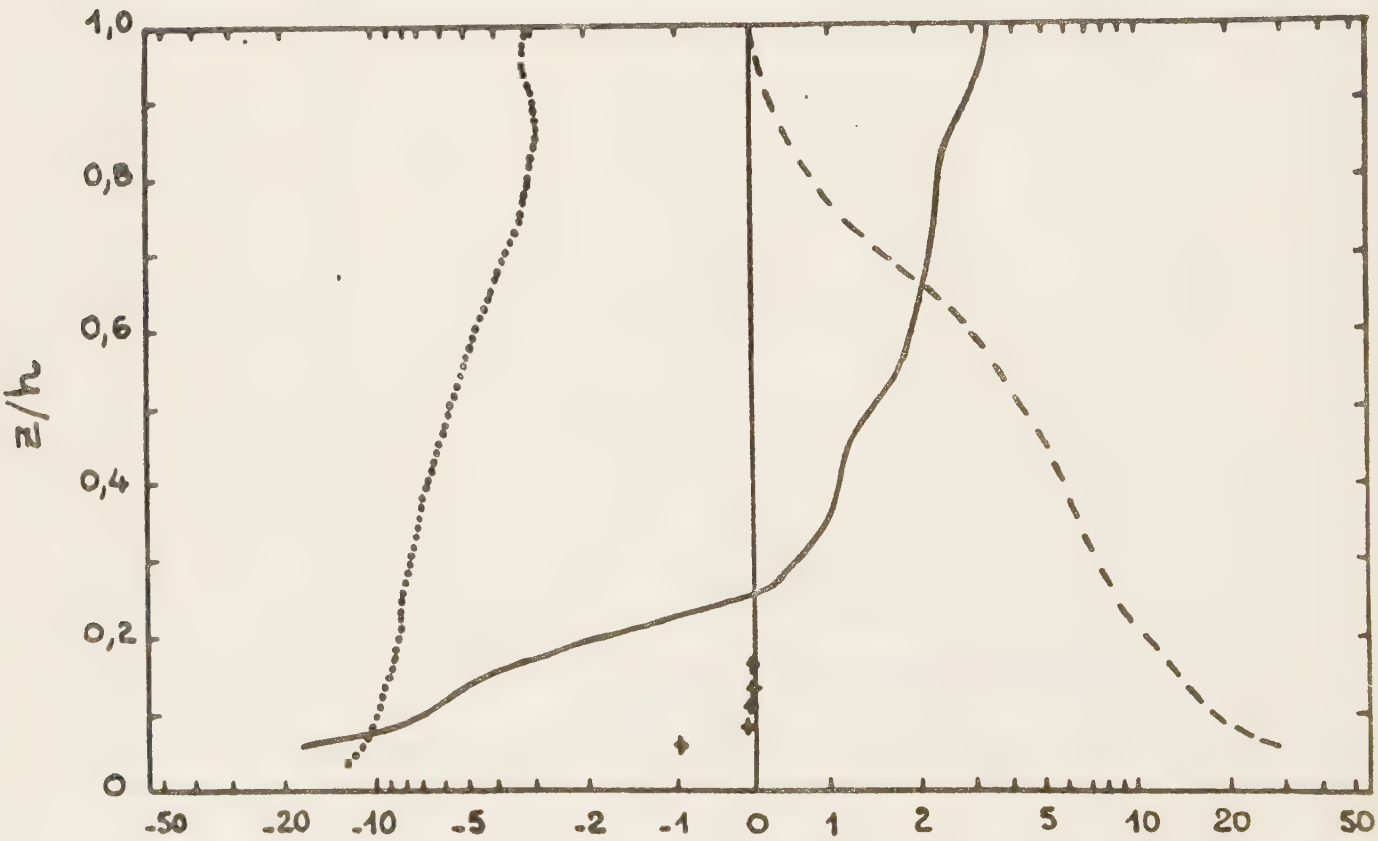

Figure 6 : Bilan de l'énergie cinétique turbulente.

———, diffusion turbulente; ....., dissipation visqueuse; - - - -, production; + + + +, presso-diffusion. Noter le changement d'échelle (linéaire-logarithmique) à z/h=-1 et +1.

est responsable de la présence de l'agitation turbulente sur l'axe de l'écoulement (Figure 5) puisqu'à ce niveau le terme de production est nul ($\overline{u'w'}$ et $\partial\bar{u}/\partial z$ sont simultanément nuls à z=h; cf. figures 2 et 3). Notons que la dissipation visqueuse ($-c_1 \bar{e}^{3/2} / h$) est à peu près constante au sein de l'écoulement et que, comme dans le cas du flux de quantité de mouvement, le terme de presso-diffusion ($c_3 \partial/\partial z (\bar{e}^{\frac{1}{2}} h \partial \overline{w'^2}/\partial z)$) contribue de façon négligeable au bilan total.

Ce bilan de l'énergie cinétique turbulente peut être comparé à celui obtenu par Deardorff (1970a) dans le cadre d'une simulation numérique tridimensionnelle.

4.2.c. Influence des Diverses Paramétrisations

L'influence des diverses constantes numériques c_1, c_3 et c_4 (*) (provenant des paramétrisations de la dissipation visqueuse et de l'action de la pression) sur les résultats numériques a été étudiée systématiquement. Afin d'obtenir un critère objectif, on a étudié l'influence de ces constantes sur la valeur de la constante de von Karman. Les résultats sont indiqués à la table 1.

	$\Delta c_1/c_1 = 11\ \%$	$\Delta c_3/c_3 = 10\ \%$	$\Delta c_4/c_4 = 11\ \%$
$\Delta\kappa/\kappa$	2,4 %(**)	5,0 %	2,25 %(**)

Table 1 : Influence des diverses paramétrisations sur la constante de von Karman.

On peut constater qu'en fait la valeur de la constante de von Karman dépend très peu de la valeur exacte des diverses constantes numériques c_1, c_3 et c_4 (*). Comme l'ordre de grandeur et le signe de ces différentes constantes sont connus à priori (par recoupement avec des estimations basées sur d'autres expériences) il

(*) Nous n'avons pas étudié l'influence des variations de c_5 car cette constante est donnée directement à partir de c_4 (Launder, 1975).

(**) Cette variation relative de la constante de von Karman n'est pas très significative car elle est comparable à l'incertitude de l'ordre de 2% qui affecte la détermination de κ (cf. Eq.(4-20)).

en résulte que le choix de ces diverses constantes a une faible répercussion sur l'exactitude des résultats obtenus.

En conclusion il semble donc que l'approximation d'écrêtage est une hypothèse de fermeture raisonnable. En effet elle permet de retrouver le profil logarithmique de la vitesse moyenne ainsi que les profils du flux turbulent de quantité de mouvement et de l'énergie cinétique turbulente. Elle semble d'autre part suffisamment précise puisqu'elle conduit à une valeur de la constante de von Karman compatible avec celle déduite des mesures de laboratoire.

4.3. La Convection Pénétrante [3]

La seconde situation dans laquelle nous allons tester l'approximation d'écrêtage est une situation où la turbulence est engendrée uniquement par un phénomène thermique: la convection turbulente de chaleur dans un fluide dilatable sans vitesse moyenne. Ce phénomène a fréquemment été étudié en laboratoire (Townsend, 1964; Deardorff, Willis et Lilly, 1969; Willis et Deardorff, 1974; cf. Türner, 1973 pour une revue plus complète de ce problème). Dans l'expérience la plus récente (Willis et Deardorff, 1974), de l'eau, contenue à l'intérieur d'une cuve parallélépipédique de longueur égale à approximativement deux fois la hauteur, est réchauffée par la base. Au début de l'expérience l'eau est à une température constante de 21 °C dans les premiers 50 cm de la cuve et au-dessus la température augmente avec l'altitude à un taux de 0,16 $^{\circ}Ccm^{-1}$ ou de 0,36 $^{\circ}Ccm^{-1}$ (cas S1 et S2 respectivement)(*). Au cours du déroulement de l'expérience la couche isotherme, en régime convectif turbulent, se réchauffe et sa hauteur croît par mélange avec les couches supérieures stablement stratifiées. Durant cette période la température et la vitesse instantanées sont mesurées en divers points du fluide ce qui permet de calculer, par moyenne, les profils verticaux de certains cumulants comme la température moyenne, les deux composantes (horizontale et verticale) de l'énergie cinétique turbulente, la variance thermique et le flux turbulent vertical d'énergie cinétique.

Le grand nombre de données relatives à cette expérience va permettre une comparaison très détaillée avec les résultats numériques. Il sera en particulier possible de comparer directement, en plus des corrélations d'ordre un et deux, les cumulants d'ordre trois mesurés et leurs valeurs numériques. De cette façon la validité de notre hypothèse de fermeture pourra être jugée non plus uniquement sur ses conséquences concernant la structure des corrélations d'ordre inférieur mais directement en tant qu'hypothèse permettant de calculer les cumulants d'ordre trois.

(*) Notons que dans l'article de Willis et Deardorff (1974) les variations de température moyenne mesurées doivent être multipliées par 0,8 afin de tenir compte d'un facteur de calibration instrumentale qui a été oublié lors de la rédaction de cet article (Willis, communication privée).

4.3.a. Le Système d'Equations

Dans l'expérience de laboratoire précédemment décrite le rapport entre la longueur et la hauteur de la cuve, bien que peu important, est toutefois suffisant pour justifier l'application de l'hypothèse d'homogénéité horizontale. De plus le nombre de Reynolds et le nombre de Rayleigh, respectivement égaux à $4\ 10^3$ et 10^{11}, sont assez élevés pour justifier de négliger les termes de diffusion moléculaire dans les équations (3-4), (3-6), (3-8), (3-9) et (3-10). Dans ces conditions le système se compose de onze équations et six inégalités pour déterminer:

- la température moyenne

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z} \quad ; \qquad (4\text{-}22)$$

- le flux cinématique de chaleur

$$\frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'^2T'}}{\partial z} - \overline{w'^2}\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + (1-c_7)\alpha g \overline{T'^2} - c_1c_6\frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\overline{w'T'} + c_3\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{e}^{\frac{1}{2}} l \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z}\right) ; \qquad (4\text{-}23)$$

- la composante horizontale $\overline{e_h}$ de l'énergie cinétique turbulente ($e_h=\frac{1}{2}(u'^2+v'^2)$)

$$\frac{\partial \overline{e_h}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'e_h}}{\partial z} + \frac{2}{3}c_5 \alpha g \overline{w'T'} - c_1c_4\frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\left(\overline{e_h} - \frac{2}{3}\overline{e}\right) - \frac{2}{3}c_1\frac{\overline{e}^{3/2}}{l} \quad ; \qquad (4\text{-}24)$$

- la variance de la vitesse verticale

$$\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'^3}}{\partial z} + (2-\frac{4}{3}c_5)\alpha g \overline{w'T'} - c_1c_4\frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\left(\overline{w'^2} - \frac{2}{3}\overline{e}\right) - \frac{2}{3}c_1\frac{\overline{e}^{3/2}}{l} \qquad (4\text{-}25)$$

$$+ 2c_3\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{e}^{\frac{1}{2}} l \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right) \quad ;$$

- la variance de température

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'T'^2}}{\partial z} - 2\,\overline{w'T'}\,\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} - c_1 c_2 \frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\,\overline{T'^2} \quad ; \qquad (4\text{-}26)$$

- les six cumulants d'ordre trois $\overline{w'^2T'}$, $\overline{w'e_h}$, $\overline{w'^3}$, $\overline{w'T'^2}$, $\overline{e_hT'}$ et $\overline{T'^3}$. Ces équations et inégalités sont données à la Section 2 de [3] (Eqs.(7) à (12)) et elles sont de structure semblable à celles correspondant au cas de la turbulence dynamique du paragraphe 4.2., à la différence qu'elles font apparaître des termes de flottabilité en α.

La longueur l caractéristique des structures énergétiques sera prise ici égale à z_i hauteur de la couche convective. En effet, une visualisation de l'écoulement turbulent (Willis et Deardorff, 1974) montre que les plus gros "tourbillons" s'étendent depuis la paroi inférieure de la cuve jusqu'au sommet de la couche convective. Cette hauteur z_i sera déterminée numériquement à chaque étape du calcul. Le coefficient de dilatation α est égal à $2{,}3\ 10^{-4}\ °C^{-1}$ et les diverses constantes qui apparaissent dans les équations d'évolution des cumulants d'ordre deux sont prises conformément à l'équation (4-11) pour c_1, c_3[(*)], c_4 et c_5 tandis que l'on prend

$$c_2 = 2{,}5 \quad ; \quad c_6 = 4{,}85 \quad ; \quad c_7 = 0{,}394 \quad . \qquad (4\text{-}27)$$

Le choix de ces trois dernières constantes a été effectué de la même façon qu'en ce qui concerne c_1, c_3, c_4 et c_5 (cf. la discussion de la section 2 de [3]).

Comme conditions initiales, le profil vertical de la température moyenne est donné conformément aux données expérimentales. Les conditions à la limite supérieure ne sont pas imposées mais calculées grâce à une différentiation spatiale en "arrière" (cf. paragraphe 4.1.a.). Les conditions à la limite inférieure (niveau $K=\frac{1}{2}$ d'altitude $z=\Delta z/2$) pour les cumulants d'ordre deux sont exprimées grâce à la théorie de similitude

(*) En fait on a utilisé $c_3=-0{,}004$ dans [3]. Ceci est du au fait que l'article [3] a été rédigé avant que l'expérience d'écoulement dans un canal ait été réalisée. Toutefois il a été vérifié que cette légère différence n'occasionnait que des modifications très faibles sur les résultats annoncés.

de la couche limite de surface en régime de convection libre (Wyngaard, Coté et Izumi, 1971). Dans cette théorie, les corrélations doubles doivent être des fonctions universelles d'une échelle de vitesse u_f et d'une échelle de température T_f

$$u_f = (\alpha g Q_o z)^{1/3} \quad ; \quad T_f = Q_o / u_f \tag{4-28}$$

où Q_o est le flux cinématique de chaleur dans cette couche de surface. Cette théorie de similitude a été vérifiée particulièrement en ce qui concerne $\overline{w'^2}$ et $\overline{T'^2}$ (Wyngaard, Coté et Izumi, 1971); par contre la composante horizontale $\overline{e_h}$ de l'énergie cinétique turbulente ne suit pas cette loi (Businger, 1973; Deardorff, 1974b) mais semble déterminée en fonction de la vitesse convective w_* (Deardorff, 1970b)

$$w_* = (\alpha g Q_o z_i)^{1/3} \quad . \tag{4-29}$$

Le système de conditions à la limite inférieure s'écrira donc:

$$\overline{w'T'}(\Delta z/2) = Q_o \tag{4-30}$$

$$\overline{e_h}\,(\Delta z/2) = 0{,}4\, w_*^2 \tag{4-31}$$

$$\overline{w'^2}(\Delta z/2) = 1{,}8\, (\alpha g Q_o \frac{\Delta z}{2})^{1/3} \tag{4-32}$$

$$\overline{T'^2}(\Delta z/2) = 1{,}8\, (\frac{2 Q_o^2}{\alpha g \Delta z})^{1/3} \tag{4-33}$$

Le modèle numérique utilisé est un modèle à 50 niveaux ($\frac{1}{2} \leqslant K \leqslant 50+\frac{1}{2}$) avec un pas d'espace Δz égal à 2 cm. Le pas de temps Δt retenu est alors $\Delta t \# 0{,}5$ sec.

4.3.b. Les Résultats Numériques

La comparaison entre les profils expérimentaux et les résultats numériques est décrite en détail à la Section 4 de [3]. L'accord entre les profils calculés et mesurés est bon aussi bien en ce qui concerne le cumulant d'ordre un (température moyenne(*)), que ceux d'ordre deux (flux de chaleur, énergie cinétique turbulente et variance de température) et trois (flux turbulent d'énergie cinétique). Nous n'insisterons pas ici sur ces comparaisons mais mettrons l'accent sur quelques autres résultats et caractéristiques de l'approximation d'écrêtage, ainsi que sur la signification de ce test numérique.

Tout d'abord la validité de l'approximation d'écrêtage est testée

i) Indirectement puisque les profils verticaux des cumulants d'ordre un et deux sont en bon accord avec l'expérience. En particulier l'hypothèse de Willis et Deardorff (1974) selon laquelle les différents paramètres de cette expérience peuvent être normalisés par la vitesse convective w_* et la température convective T_* ($T_* = Q_0 / w_*$) est bien vérifiée. De plus la loi d'épaississement de la couche convective ($dz_i/dt \sim w_*$) est elle aussi retrouvée et ceci constitue une justification importante puisqu'il est connu que ce type de loi est particulièrement sensible à l'hypothèse de fermeture employée (Deardorff, 1973; Somméria, 1974).

ii) Directement puisque les corrélations triples calculées, sur lesquelles l'hypothèse de fermeture a une influence directe, sont en bon accord avec les valeurs mesurées.

Un deuxième enseignement de ce test numérique est que l'approximation d'écrêtage fournit un schéma stable pour le calcul des cumulants d'ordre trois: bien que l'approximation d'écrêtage agisse à priori de façon discontinue (cf. paragraphe 3.2.c.), il s'avère que l'application des conditions de réalisabilité est suffisamment bien répartie dans le temps et dans l'espace pour ne pas introduire d'oscillations dans les profils des cumulants d'ordre trois.

Une étude de la fréquence d'application des conditions de réalisabilité (cf. Section 6 de [3]) montre que celles-ci sont efficaces non seulement pour

(*) La grande régularité des profils expérimentaux de température qui apparaissent à la figure 2 de [3] est due au fait que ces profils ont été moyennés sur un grand intervalle de temps (de l'ordre de 30 secondes).

assurer la réalisabilité d'un écoulement bien établi mais qu'elles jouent aussi un rôle important durant la période d'établissement du régime turbulent. En d'autres termes l'approximation d'écrêtage permet d'utiliser des états initiaux extrèmement simples sans grande signification physique puisqu'elle est capable de corriger les incohérences ainsi introduites (cf. paragraphe 4.1.c.).

Enfin, en tant qu'hypothèse de fermeture testée sur des résultats expérimentaux, elle permet d'éclairer un certain nombre de problèmes non résolus. En particulier elle donne des indications sur la loi de similitude que suit le flux turbulent d'énergie cinétique $\overline{w'e}$ ($\overline{w'e} = \overline{w'e_h} + \frac{1}{2}\,\overline{w'^3}$) dans la couche limite de surface. La loi de similitude implique

$$\overline{w'e} = a\,u_f^3 \qquad (4\text{-}34)$$

mais le coefficient de proportionnalité a reste inconnu. Les mesures atmosphériques (cf. Wyngaard et Coté, 1971) ne sont pas assez précises pour déterminer exactement la valeur de a mais Wyngaard et Coté ont postulé pourtant que a devait être de l'ordre de un. Un examen de l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente (obtenue par addition des équations (4-24) et (4-25))

$$\frac{\partial \overline{e}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{w'e}}{\partial z} + \alpha\, g\, \overline{w'T'} - c_1 \frac{\overline{e}^{3/2}}{z_i} + c_3\, z_i \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{e}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} \right) \qquad (4\text{-}35)$$

montre que si a=1 il y a équilibre, en régime stationnaire dans la couche limite de surface, entre le flux turbulent et la production d'énergie cinétique. Ceci impliquerait donc, dans cette couche, une dissipation

- ou bien nulle si l'on néglige le terme de diffusion par les forces de pression,
- ou bien égale, en valeur absolue, à ce même terme de presso-diffusion (Mc Bean et Elliott, 1975).

Ces deux solutions ne sont guère plausibles étant donné la petitesse du terme de presso-diffusion. L'approximation d'écrêtage permet de dégager une troisième possibilité (cf. Section 5 de [3]) : a = 0,7 . Dans ces conditions le bilan de l'énergie cinétique dans la couche limite de surface est le suivant: sur la quantité d'énergie produite par les forces de flottabilité, 20 % environ sont dissipés sur place tandis que le reste est exporté vers la couche convective à raison de 70 % par le flux turbulent et de 10 % par les forces de pression.

Il faut enfin noter que dans cette expérience de convection pénétrante il aurait été impossible d'appliquer une hypothèse de fermeture du type "gradient" comme celle décrite par l'équation (3-20). En effet, dans la couche limite de surface où $\overline{\theta}$ croît avec l'altitude (cf. Eqs.(4-31) et (4-32)) il faudrait considérer, par suite de la positivité de $\overline{w'\theta}$, une longueur caractéristique l négative (Wyngaard, 1973) alors que dans la moitié supérieure de la couche convective où l'énergie cinétique décroît avec l'altitude (Figures 4 et 5 de [3]) et où le flux turbulent $\overline{w'\theta}$ reste positif (Figure 6 de [3]) cette même longueur caractéristique l est positive.

L'approximation d'écrêtage ayant été testée dans deux cas relativement simples qui ne mettaient en jeu, à chaque fois, qu'un seul type de phénomènes, il est maintenant possible d'appliquer cette hypothèse de fermeture à une situation physique dans laquelle les aspects thermiques et dynamiques sont simultanément présents. La situation retenue correspond au cas de la couche limite planétaire de l'atmosphère terrestre. Par couche limite planétaire il faut entendre la partie de l'atmosphère à l'intérieur de laquelle les flux turbulents (de chaleur, de quantité de mouvement, ...) ont des valeurs significatives; en d'autres termes le sommet de la couche limite planétaire est défini comme le niveau où ces différents flux turbulents s'annulent. La hauteur de cette couche est typiquement de l'ordre du kilomètre. Dans la couche limite planétaire il est possible d'appliquer l'approximation de Boussinesq (cf. par exemple Dutton et Fichtl, 1969) et l'hypothèse d'homogénéité horizontale à condition toutefois que la situation météorologique soit suffisamment "propice" (présence d'un anticyclone, par exemple).

Comme situation test nous avons retenu l'expérience dite de Wangara(*) (Clarke, Dyer, Brook, Reid et Troup, 1971). Durant cette expérience atmosphérique, menée à Hay (Australie) au cours de l'hiver (juillet et août) 1967, la couche limite planétaire a été explorée de façon intensive: le vent, en direction et module, a été mesuré du sol jusqu'à une altitude de 2 kilomètres à des intervalles réguliers de une heure tandis que la température était mesurée, dans la même gamme d'altitudes, toutes les trois heures. Le site environnant était suffisamment plat et dénué de végétation pour permettre une bonne homogénéité horizontale de la couche limite planétaire. Au cours de la 33^{ième} journée de l'expérience (16/08/67) le site expérimental se trouvait pratiquement au centre d'une zone de hautes pressions et c'est cette journée qui sera retenue pour le test numérique(**). La journée 33 est caractérisée par une forte insolation qui a donné naissance à un régime de convection turbulente de chaleur (en celà analogue à l'expérience du paragraphe 4.3.) et par un vent horizontal de l'ordre de quelques mètres par seconde qui, durant le cours de cette journée, s'est progressivement homogénéisé à la verticale du site expérimental.

(*) Wangara est le mot aborigène australien pour "vent d'ouest".

(**) Cette journée 33 a été retenue par d'autres auteurs pour tester leurs modèles de couche limite planétaire (Clarke, 1974; Deardorff, 1974a et 1974b; Wyngaard et Coté, 1974; Yamada et Mellor, 1975).

4.4.a. Le Système d'Equations

Par rapport aux équations générales discutées à la Section 3, le cas de la couche limite planétaire introduit une petite complication supplémentaire. En effet l'influence de la rotation terrestre sur la dynamique de cette couche se traduit par l'introduction d'une force supplémentaire: la force de Coriolis, proportionnelle à la vitesse de l'écoulement. Cette force est surtout importante en ce qui concerne le mouvement horizontal si bien que son introduction se traduit simplement, au second membre de l'équation (3-1), par l'addition du terme $f (u_2 \delta_{1i} - u_1 \delta_{2i})$ où f (paramètre de Coriolis) est la composante verticale du vecteur représentant la rotation terrestre

$$f = 2 |\vec{\Omega}| \sin \varphi \qquad (4\text{-}36)$$

où $\vec{\Omega}$ est la vitesse de rotation terrestre ($|\vec{\Omega}| \# 7{,}29\ 10^{-5}$ rad sec^{-1}) et φ la latitude du lieu. Puisque la force de Coriolis s'exprime linéairement en fonction de la vitesse, son introduction ne pose aucun nouveau problème. Par contre elle complique légèrement le système d'équations qui, au lieu de 26 inconnues (cf. paragraphe 3.2.c.), en contient alors 29 puisque s'introduisent une nouvelle corrélation double $\overline{u'v'}$ (représentant l'action de la force de Coriolis sur les composantes horizontales de l'énergie cinétique turbulente) et deux cumulants d'ordre trois $\overline{u'v'w'}$ et $\overline{u'v'T'}$ qui représentent respectivement le flux turbulent vertical de $\overline{u'v'}$ et l'action des forces de flottabilité sur ce dernier terme.

Une autre modification par rapport au système d'équations décrit à la Section 3 est que, par suite de la compressibilité de l'air, l'équation thermodynamique (3-3) doit être complétée au second membre par le terme de compressibilité $(1-\gamma) T \partial u_j/\partial x_j$ (où γ est le rapport des chaleurs spécifiques de l'air). Cette difficulté peut être levée si l'on considère, au lieu de la température T, une autre variable thermodynamique: la température potentielle θ directement reliée à l'entropie S. En effet la variation d'entropie dS s'écrit (par suite du premier principe de la thermodynamique appliqué à un gaz parfait dans le cas où il n'y a pas d'apport extérieur de chaleur) :

$$dS = C_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = 0 \qquad (4\text{-}37)$$

où R est la constante universelle des gaz parfaits et C_p la chaleur spécifique de l'air à pression constante. L'équation (4-37) permet alors de définir une nouvelle quantité conservative θ (température potentielle) par $dS = C_p \, d\Theta/\Theta$ et il vient

$$\Theta = T \left(p/p_o \right)^{1-\delta/\delta} \qquad (4\text{-}38)$$

où p_o est la pression en surface qui définit l'altitude à laquelle $\Theta = T$. L'équation d'évolution de la température potentielle s'écrit alors

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\partial u_j \Theta}{\partial x_j} = \lambda' \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (4\text{-}39)$$

et, puisque dans la couche limite planétaire $\Theta' \neq T'$ (cf. Monin et Yaglom, 1971), le système d'équations de base que nous obtenons dans ce cas est formellement identique au système (3-1) à (3-3) à la seule différence que, dans les équations aux cumulants, T est partout remplacé par Θ.

Nous ne donnerons ici que quelques exemples caractéristiques des équations et inégalités qui composent le système. Parmi celles-ci nous citerons les équations d'évolution

- de la température potentielle moyenne

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} = - \frac{\partial \overline{w'\Theta'}}{\partial z} \qquad (4\text{-}40)$$

- du vent horizontal moyen

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f \bar{v} \qquad (4\text{-}41)$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - f\,\overline{u} \qquad (4\text{-}42)$$

- du flux turbulent vertical de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u'w'^2}}{\partial z} - (1-c_5)\,\overline{w'^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + (1-c_5)\,\alpha\, g\,\overline{u'\theta'} - c_1 c_4 \frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\,\overline{u'w'}$$

$$+ c_3 \frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{e}^{\frac{1}{2}}\, l \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right) + f\,\overline{v'w'} \qquad (4\text{-}43)$$

et l'équation analogue pour $\overline{v'w'}$

- de la corrélation $\overline{u'v'}$

$$\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u'v'w'}}{\partial z} - (1-c_5)\left(\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \overline{v'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right) - c_1 c_4 \frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\,\overline{u'v'}$$

$$+ f\left(\overline{v'^2} - \overline{u'^2}\right) \qquad (4\text{-}44)$$

- de la composante horizontale $\overline{u'^2}$ de l'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{u'^2 w'}}{\partial z} - \left(2 - \frac{4}{3}c_5\right)\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \frac{2}{3}c_5\,\overline{v'w'}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{2}{3}c_5\,\alpha\, g\,\overline{w'\theta'}$$

$$- c_1 c_4 \frac{\overline{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\left(\overline{u'^2} - \frac{2}{3}\overline{e}\right) - \frac{2}{3}c_1\frac{\overline{e}^{3/2}}{l} + 2\,f\,\overline{u'v'} \qquad (4\text{-}45)$$

- du flux turbulent vertical $\overline{u'^2 w'}$ de la composante horizontale $\overline{u'^2}$ de l'énergie cinétique turbulente

$$\frac{\partial \overline{u'^2 w'}}{\partial t} = -\overline{w'^2}\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial z} - 2\,\overline{u'w'}\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - 2\,\overline{u'w'^2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} + \alpha\, g\,\overline{u'^2\theta'} + 2\,f\,\overline{u'v'w'} \qquad (4\text{-}46)$$

$$\left|\overline{u'^2 w'}\right| \leqslant \left[\overline{u'^2}\left(\overline{u'^2}.\overline{w'^2} + \overline{u'w'}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (4\text{-}46^{bis})$$

- du cumulant d'ordre trois $\overline{u'w'\theta'}$

$$\frac{\partial \overline{u'w'\theta'}}{\partial t} = -\overline{w'^2\theta'}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \overline{u'w'^2}\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \overline{w'\theta'}\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} - \overline{w'^2}\frac{\partial \overline{u'\theta'}}{\partial z} - \overline{u'w'}\frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z}$$

$$+\alpha g \overline{u'\theta'^2} + f\overline{v'w'\theta'} \qquad (4\text{-}47)$$

$$\left|\overline{u'w'\theta'}\right| \leq \text{Inf}\left\{\begin{array}{l}\left[\overline{u'^2}\left(\overline{w'^2}.\overline{\theta'^2} + \overline{w'\theta'}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \left[\overline{w'^2}\left(\overline{u'^2}.\overline{\theta'^2} + \overline{u'\theta'}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}, \\ \left[\overline{\theta'^2}\left(\overline{u'^2}.\overline{w'^2} + \overline{u'w'}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\end{array}\right\} \qquad (4\text{-}47^{bis})$$

Le système complet se compose donc de 3 équations pour les cumulants d'ordre 1 (Eqs.(4-40), (4-41) et (4-42)), de 10 équations pour les cumulants d'ordre 2 $\overline{u'^2}$ (Eq.(4-45)), $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{u'w'}$ (Eq.(4-43)), $\overline{v'w'}$, $\overline{u'v'}$ (Eq.(4-44)), $\overline{u'\theta'}$, $\overline{v'\theta'}$, $\overline{w'\theta'}$ et $\overline{\theta'^2}$, et de 16 équations et inégalités pour les cumulants d'ordre 3 $\overline{w'^3}$, $\overline{w'^2\theta'}$, $\overline{w'\theta'^2}$, $\overline{\theta'^3}$, $\overline{u'w'\theta'}$ (Eq.(4-47) et (4-47bis)), $\overline{v'w'\theta'}$, $\overline{u'w'^2}$, $\overline{v'w'^2}$, $\overline{u'\theta'^2}$, $\overline{v'\theta'^2}$, $\overline{u'^2w'}$ (Eqs.(4-46) et (4-46bis)), $\overline{v'^2w'}$, $\overline{u'^2\theta'}$, $\overline{v'^2\theta'}$, $\overline{u'v'w'}$ et $\overline{u'v'\theta'}$.

La longueur caractéristique l sera prise ici égale à la hauteur z_i de la couche convective turbulente et elle sera déterminée de la même façon que dans le cas de la convection pénétrante en cuve (cf. paragraphe 4.3.a.). Les constantes numériques c_1 à c_7 utilisées sont toujours données par les équations (4-11) et (4-27); cf. Section 2 de [3]) et le coefficient de dilatation α est égal à $1/T_o \neq 1/\theta_o$ (cf. paragraphe 3.1.a.) où θ_o est une valeur typique de la température potentielle (θ_o = 285 °K). Le gradient horizontal de pression ($\partial\bar{p}/\partial x$, $\partial\bar{p}/\partial y$) sera pris égal à sa valeur météorologique lors de la journée 33 de l'expérience Wangara (cf. Deardorff, 1974a).

Comme conditions initiales les profils verticaux de la température potentielle moyenne et des deux composantes du vent horizontal moyen seront les profils correspondant à l'expérience atmosphérique pris à 9 heures du matin. Les conditions à la limite supérieure ne seront pas imposées mais calculées (cf. paragraphes 4.1.a. et 4.3.a.). Les conditions à la limite inférieure (niveau K=$\frac{1}{2}$ d'altitude

$z = 1$ m) pour les cumulants d'ordre deux sont exprimées grâce à la théorie de similitude de la couche limite de surface en stratification thermique quelconque (cf. par exemple Monin et Yaglom, 1971) au dessus d'un sol rugueux dont la longueur de rugosité est z_o (ici égale à 1 cm, Clarke et al., 1971). Dans cette théorie(*) les corrélations doubles doivent être des fonctions universelles d'une échelle de vitesse u_* (vitesse de friction, égale à la racine carrée du module de la tension au sol) et du flux turbulent de chaleur Q_o constant, dans cette couche, avec l'altitude. La stratification thermique est prise en compte par une échelle de longueur L, dite longueur de Monin-Obukhov

$$L = - \frac{u_*^3 \theta_o}{\kappa g Q_o} \quad , \tag{4-48}$$

qui sert à normaliser l'altitude. Dans ces conditions, les conditions à la limite inférieure seront prises conformément à(**) (Businger, Wyngaard, Izumi et Bradley, 1971; Wyngaard et Coté, 1971 et 1974) :

$$\overline{u'^2}(z) = 4\, u_*^2 + 0{,}2\, w_*^2 \tag{4-49}$$

$$\overline{v'^2}(z) = 1{,}75\, u_*^2 + 0{,}2\, w_*^2 \tag{4-50}$$

$$\overline{w'^2}(z) = \left[1{,}75 + 2 \left(-\frac{z}{L}\right)^{2/3} \right] u_*^2 \tag{4-51}$$

$$\overline{u'w'}(z) = - u_*^2 \tag{4-52}$$

$$\overline{u'v'}(z) = 0 \tag{4-53}$$

$$\overline{w'\theta'}(z) = Q_o \tag{4-54}$$

$$\overline{u'\theta'}(z) = - 3{,}7 \left(1 - 15 \frac{z}{L} \right)^{-1/4} \left(1 - 9 \frac{z}{L} \right)^{-\frac{1}{2}} Q_o \tag{4-55}$$

(*) La théorie de similitude correspondant au cas de la convection libre (cf. Paragraphe 4.3.a.) s'obtient par passage à la limite $u_* \to 0$ à partir de la présente théorie.

(**) Ces conditions sont exprimées dans des axes tels que la vitesse du vent au sol soit parallèle à $\vec{Ox}$. Dans le cas général il suffit de reconstruire les quantités manquantes ($\overline{v'w'}$ et $\overline{v'\theta'}$) par rotation des axes.

$$\overline{\theta'^2}(z) = 4\left(1 - 8{,}3\,\frac{z}{L}\right)^{-2/3} \frac{Q_o^2}{u_*^2} \qquad (4\text{-}56)$$

où u_* et Q_o seront pris conformément aux données expérimentales (cf. par exemple Deardorff, 1974a et 1974b; Wyngaard et Coté, 1974).

Le modèle numérique utilisé est un modèle à 40 niveaux ($\frac{1}{2} \leqslant K \leqslant 40+\frac{1}{2}$) avec un pas d'espace Δz égal à 50 mètres. Le pas de temps Δt retenu est alors voisin de 4 secondes.

4.4.b. Les Résultats Numériques

L'évolution de la température potentielle moyenne $\overline{\theta}$ est indiquée à la figure 7 où elle est comparée aux valeurs mesurées. L'état initial (à 9 heures) est caractéristique d'un profil de température matinal avec une zone, proche du sol, où la température potentielle augmente fortement avec l'altitude. Cette zone a été créée par le refroidissement radiatif nocturne du sol à partir du profil convectif ($\overline{\theta}$ sensiblement constante) de la veille dont une partie reste encore visible (de 300 à 700 m environ). Au dessus de 700 m commence une zone à stratification thermique stable qui est, elle aussi, caractéristique de la partie supérieure de la couche limite planétaire.

Au cours du réchauffement diurne il y a création progressive d'une couche convective de stratification thermique pratiquement nulle (courbe en tireté à 12 h et en pointillé à 15 h). La hauteur de cette couche croît avec la quantité de chaleur fournie à la base et à 15 heures elle atteint 1400 m environ. Ces résultats sont en bon accord avec les points de mesure (• à 12 h et + à 15 h). A proximité immédiate du sol, c'est-à-dire pratiquement dans la couche limite de surface, le gradient de température potentielle est négatif. Cette couche, qui a une épaisseur de l'ordre de quelques dizaines de mètres, agit comme un réservoir de chaleur pour la couche limite planétaire et elle peut encore provoquer de la convection après l'arrêt du chauffage au sol. Au sommet de la couche limite planétaire la température potentielle est inférieure à sa valeur initiale. Ceci est dû à l'érosion progressive des couches

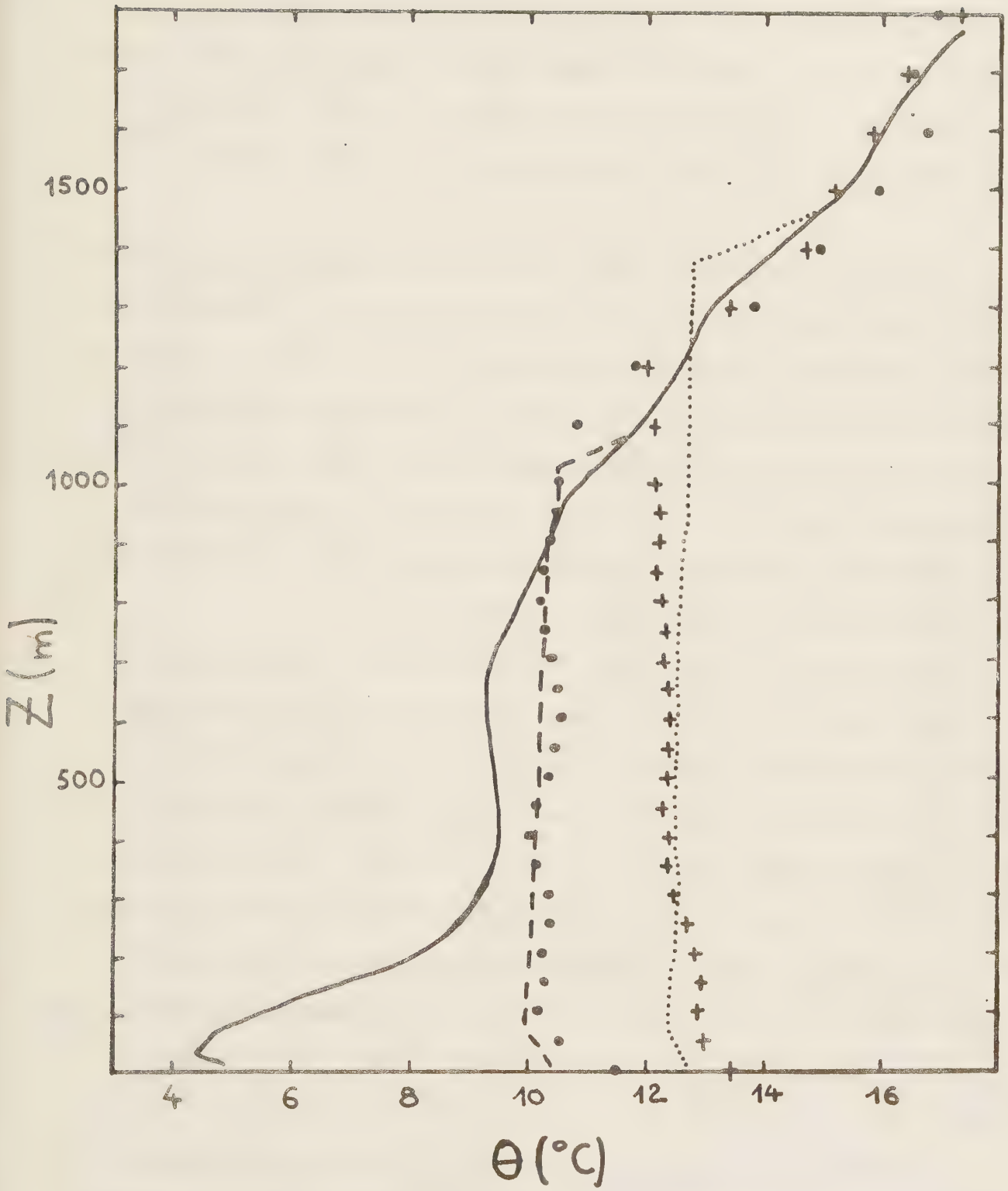

Figure 7 : Evolution de la température potentielle moyenne

———, données expérimentales et condition initiale à 9 h; - - - -, résultats numériques à 12 h; • • • •, données expérimentales à 12 h; ....., résultats numériques à 15 h; + + + +, données expérimentales à 15 h.

stables supérieures, c'est-à-dire à l'entraînement de l'air chaud supérieur dans la couche convective, ce mécanisme permettant l'épaississement de la couche convective. Ces différentes caractéristiques de l'évolution diurne de la couche limite planétaire ne sont pas spécifiques à l'expérience Wangara mais sont, plus généralement, typiques du régime convectif des basses couches de l'atmosphère (cf. entre autres Lettau et Davidson, 1957; Lenschow et Johnson, 1968; Lenschow, 1973; Rowland, 1973).

L'évolution du vent moyen ($\overline{u},\overline{v}$) est indiquée aux figures 8a, 8b, 8c et 8d où elle est aussi comparée aux résultats expérimentaux. A 9 heures (Figure 8a) nos conditions initiales sont choisies à partir du vent réel (• pour $\overline{u}$ et + pour $\overline{v}$) légèrement adouci. La distribution initiale du vent est caractérisée par une couche de quelques centaines de mètres où les deux composantes $\overline{u}$ et $\overline{v}$ sont sensiblement constantes (et respectivement égales à -3 m sec^{-1} et $-0,5$ m sec^{-1}) alors que dans les couches supérieures le vent tourne progressivement et tend vers le vent régnant dans l'atmosphère au-dessus de la couche limite planétaire.

Au bout de deux heures d'évolution (c'est-à-dire à 11 h, Figure 8b) le vent est sensiblement constant dans la couche convective qui, à ce moment, occupe une hauteur d'environ 900 m. Toutefois, par rapport à sa distribution initiale le vent a tourné puisque, si la composante $\overline{u}$ est restée du même ordre de grandeur, la composante $\overline{v}$ est maintenant positive de l'ordre de 0,3 m sec^{-1}. Au cours des quatre heures suivantes (c'est-à-dire jusqu'à 15 h, Figures 8c et 8d) le même processus se poursuit puisqu'alors le vent est pratiquement constant dans la couche convective (de hauteur égale à 1100 m à 13 h et à 1400 m à 15 h) et puisqu'il continue de tourner, la composante $\overline{v}$ atteignant des valeurs de l'ordre de 1 m sec^{-1} à 13 h et même de 1,5 m sec^{-1} à 15 h.

Le processus d'égalisation progressive du vent dans la partie convective de la couche limite planétaire s'explique par les propriétés de brassage de la turbulence d'origine thermique créée par le réchauffement du sol. Par contre la variation de la direction du vent au cours de la journée s'explique évidemment par la présence de la force de Coriolis. Dans le cas de l'expérience Wangara, qui a eu lieu à une latitude

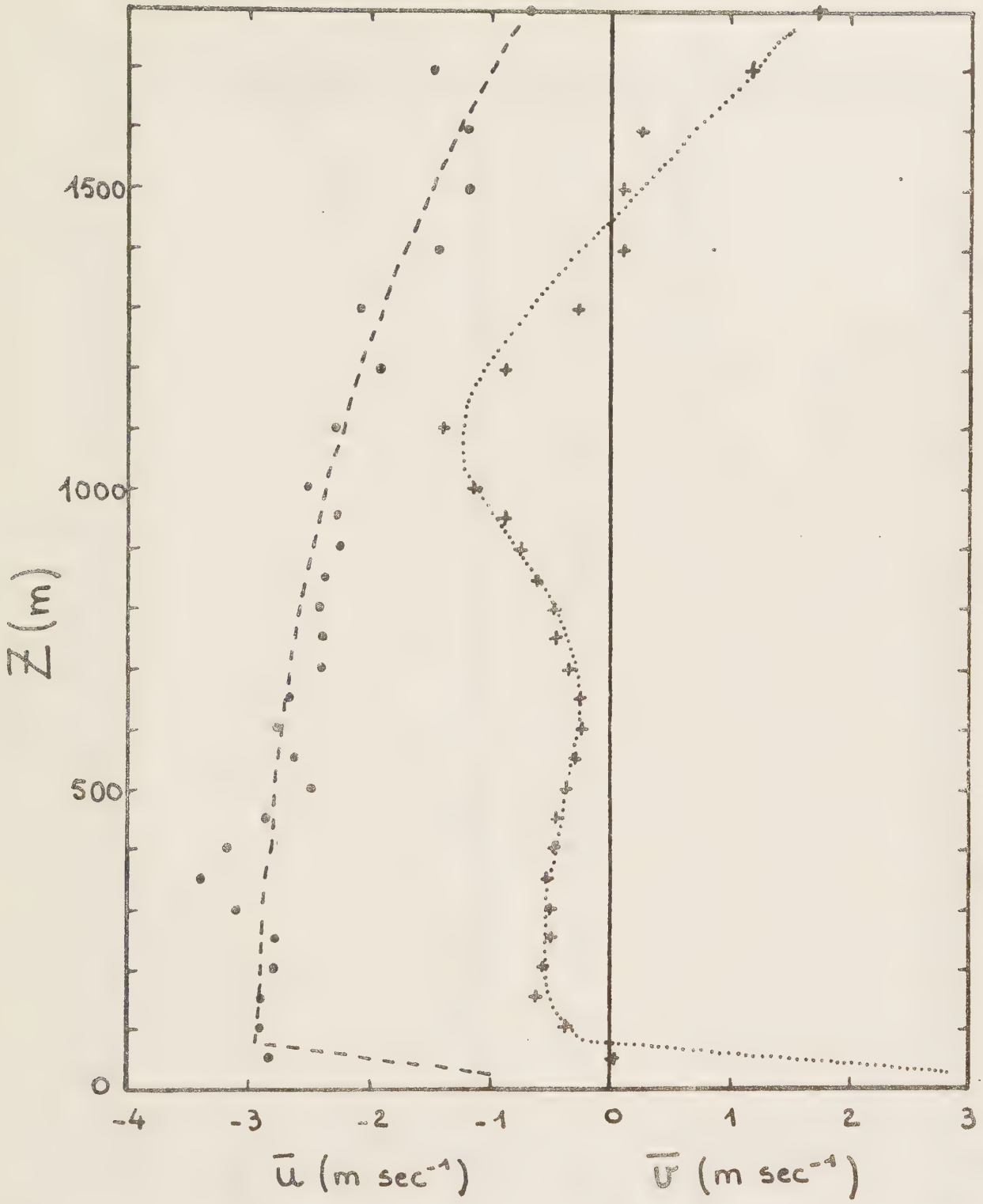

Figure 8a : Le vent moyen à 9 heures

Composante zonale mesurée (• • •) et condition initiale correspondante (- - -)

Composante méridienne mesurée (+ + +) et condition initiale correspondante (....)

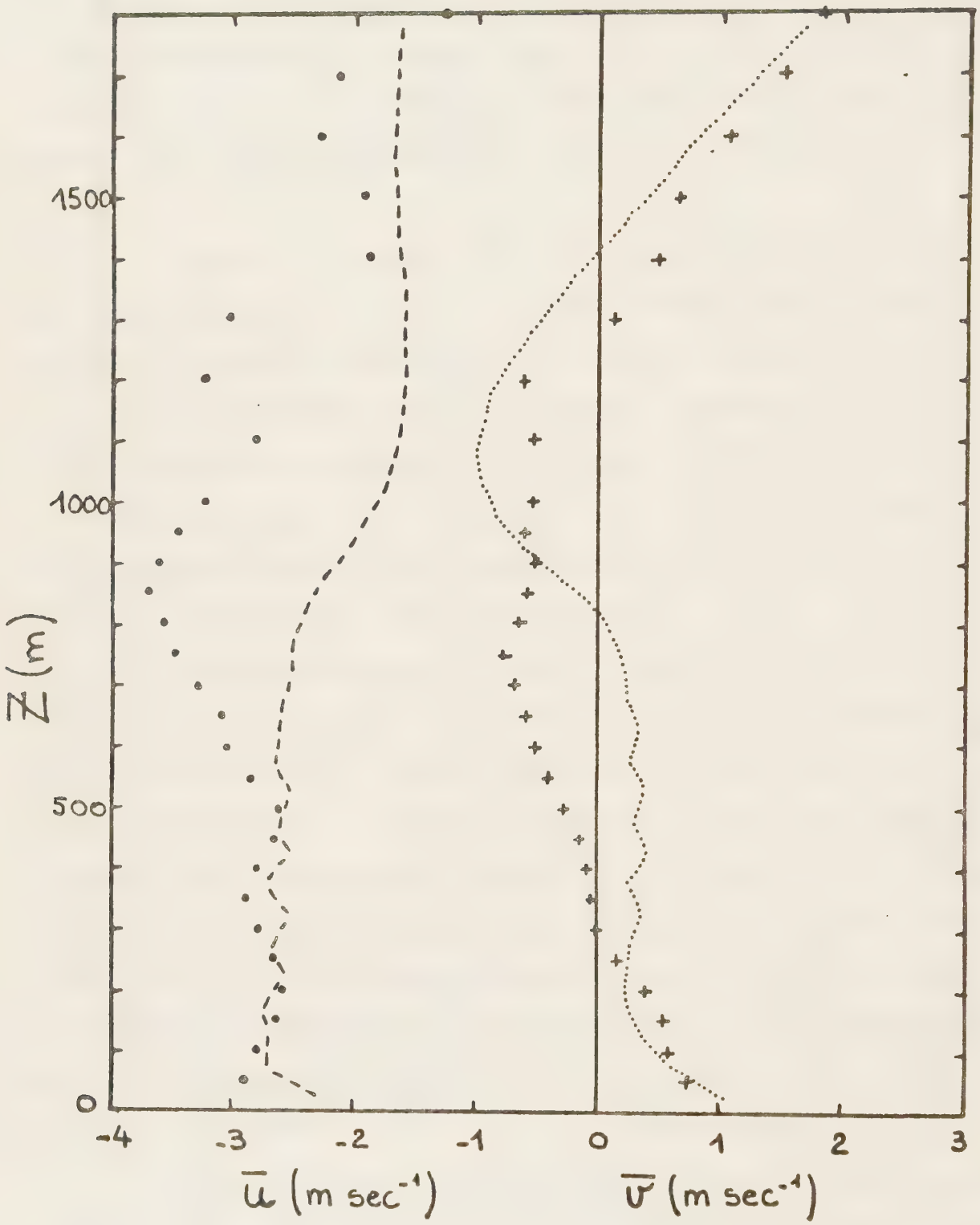

Figure 8b : Le vent moyen à 11 heures

Composante zonale mesurée (• • •) et calculée (- - -)

Composante méridienne mesurée (+ + +) et calculée (.....)

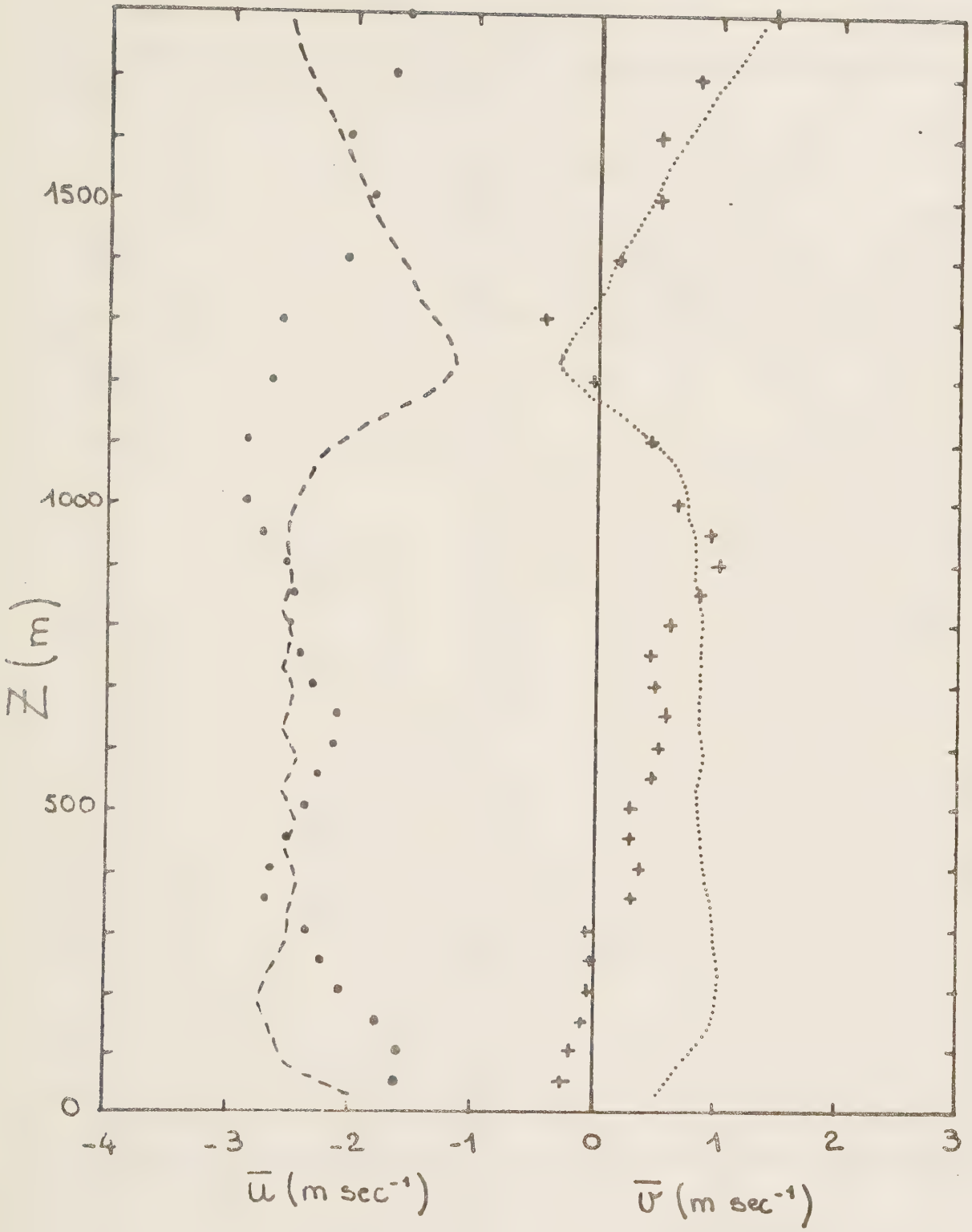

Figure 8c : Le vent moyen à 13 heures

Composante zonale mesurée (• • •) et calculée (- - -)

Composante méridienne mesurée (+ + +) et calculée (.....)

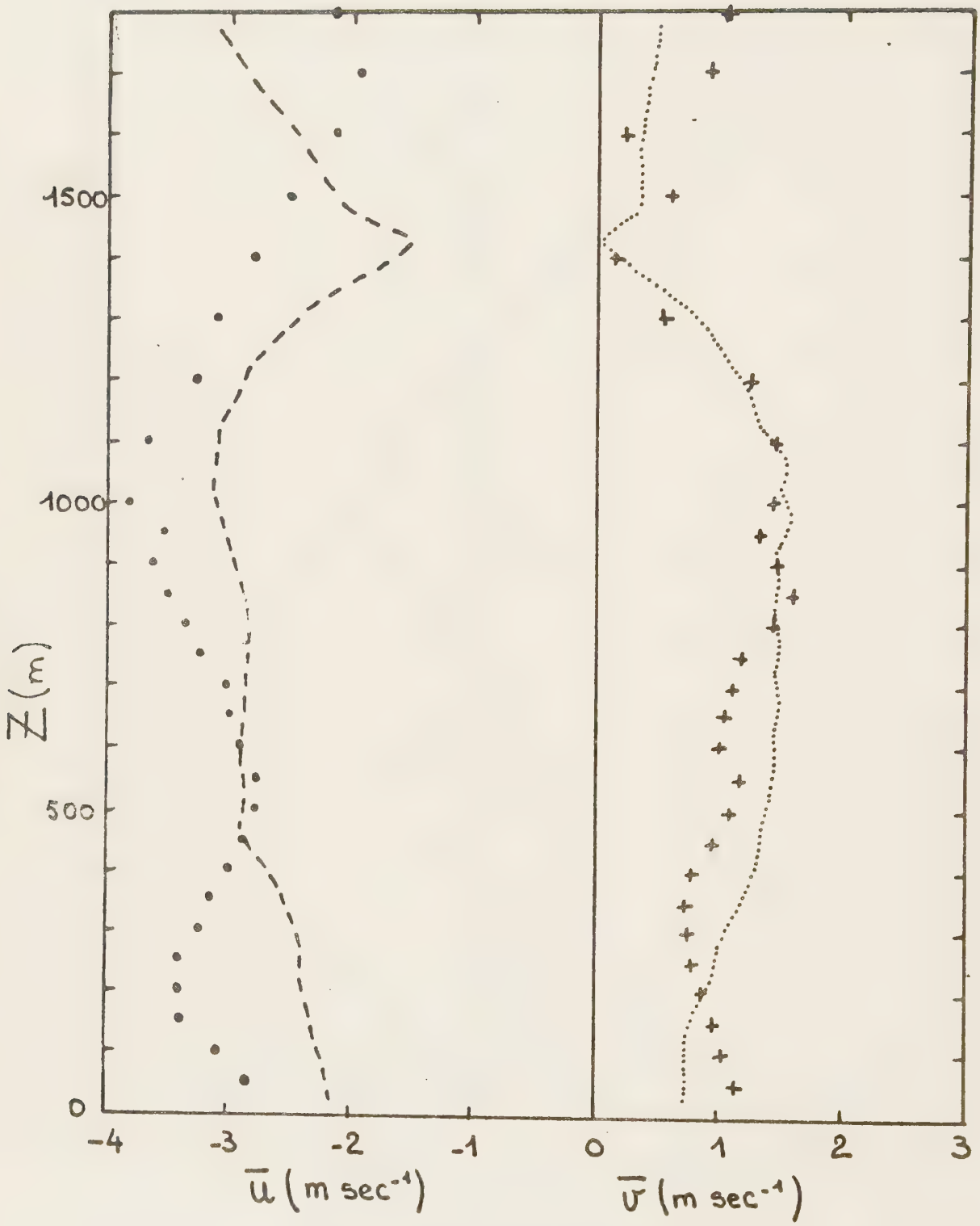

Figure 8d : Le vent moyen à 15 heures

Composante zonale mesurée (• • •) et calculée (- - -)

Composante méridienne mesurée (+ + +) et calculée (.....)

de 34,5 °Sud, le temps caractéristique associé à la force de Coriolis ($T_c = 2\pi/f$) est de l'ordre de 21 heures et c'est cette échelle de temps qui est pertinente pour expliquer la rotation du vent dans la couche limite planétaire. Ces différentes caractéristiques de l'évolution du vent moyen sont en bon accord avec les données expérimentales (• pour $\overline{u}$ et + pour $\overline{v}$) malgré la présence de quelques irrégularités dans ces dernières. Il faut noter à ce sujet que les résultats que nous présentons aux figures 8b, 8c et 8d sont des résultats numériques moyennés sur 30 minutes(*) alors que les données expérimentales correspondantes, bien qu'assez régulières, sont tout de même affectées par d'assez nombreuses oscillations (d'origine naturelle et/ou instrumentale).

(*) Les résultats numériques bruts (c'est-à-dire sans aucun lissage temporel) font en effet apparaître de nombreuses oscillations dues en particulier à la présence d'ondes de gravité internes (Paragraphe 4.1.b.).

V. Conclusion

Les hypothèses de fermeture à adjoindre à la hiérarchie infinie d'équations aux cumulants décrivant la turbulence fluide ne peuvent pas être de nature quelconque. Elles doivent en particulier être compatibles avec le phénomène d'irréversibilité statistique, c'est-à-dire qu'elles doivent pouvoir reproduire un éventuel comportement irréversible des diverses quantités moyennées (dont les cumulants) même si ces quantités non moyennées ont au départ un comportement parfaitement réversible. Ce phénomène, dont le correspondant mathématique est l'existence d'un nombre infini de cumulants (ou moments) en interaction(*), se traduit, tout au moins en turbulence homogène et isotrope, par un effet amortissant des cumulants d'ordre élevé sur les cumulants d'ordre inférieur.

Cet effet peut être facilement pris en compte en turbulence homogène et isotrope. Il suffit par exemple de considérer, comme hypothèse de fermeture, l'approximation quasi-normale (moments d'ordre quatre reliés aux moments d'ordre deux comme dans une distribution de probabilité gaussienne) et de la compléter en introduisant explicitement un terme d'amortissement irréversible agissant sur le cumulant d'ordre trois. Malheureusement une démarche aussi simple ne peut pas être employée en turbulence inhomogène car alors il n'est plus possible de montrer que l'irréversibilité stochastique se traduit par une simple relaxation linéaire des cumulants d'ordre trois. De toutes façons la complexité propre de la turbulence inhomogène rend difficile toute approche systématique. On en est donc réduit à chercher un mécanisme irréversible et, d'une façon ou d'une autre, amortissant pour l'adjoindre à l'approximation quasi-normale.

Une possibilité consiste à considérer de simples conditions de réalisabilité, déduites de l'inégalité de Schwarz, comme mécanisme à adjoindre à l'approximation quasi-normale. Cette possibilité présente l'avantage considérable d'être facilement utilisable pour des calculs concrets (et numériques) de turbulence inhomogène. Une telle hypothèse de fermeture, pour laquelle une justification a postériori consiste

---

(*) En d'autres termes ceci veut dire qu'il y a une perte d'information à travers cette suite infinie de cumulants en interaction et que ce mécanisme turbulent irréversible subsiste même lorsque la seule cause explicite d'irréversibilité disparait, c'est-à-dire lorsque la viscosité tend vers zéro.

en des comparaisons avec des situations expérimentales ou bien avec des lois connues, permet de retrouver un résultat classique comme l'existence de la loi logarithmique du profil de vitesse pour un écoulement dans un canal. Elle permet aussi de bien reproduire certaines expériences de laboratoire comme celles concernant la convection pénétrante mais elle est aussi applicable à des situations d'intérêt géophysique comme la turbulence dans la couche limite de l'atmosphère terrestre.

Cette nouvelle hypothèse de fermeture permet de surmonter certaines difficultés inhérentes aux hypothèses de fermeture plus ou moins classiques. Elle est en particulier indépendante de toute notion de viscosité turbulente ce qui la rend apte à décrire toute une gamme de situations réelles pour lesquelles il est bien connu que cette notion est inapplicable. Elle permet aussi de bien décrire les corrélations d'ordre trois ce qui lui donne une justification physique réelle et non plus une justification en tant que moyen permettant de retrouver simplement les paramètres moyens de l'écoulement. En d'autres termes cette hypothèse de fermeture ne doit pas être considérée comme un simple artifice mathématique permettant de fermer la hiérarchie d'équations à un niveau suffisamment élevé pour que la répercussion sur les corrélations d'ordre inférieur soit peu importante.

Cette hypothèse de fermeture est de plus d'une utilisation pratique relativement aisée puisque nécessitant un temps de calcul raisonnable. A titre d'exemple la simulation numérique d'un écoulement turbulent inhomogène comme celui de la couche limite planétaire de l'atmosphère nécessite, pour une heure de simulation avec un modèle à 40 niveaux, de l'ordre de 2 minutes de temps de calcul sur un ordinateur CDC 6600. Ce chiffre est comparable avec celui relatif aux hypothèses de fermeture plus classiques et il rend possibles de nombreuses expériences numériques. C'est d'ailleurs probablement dans ce domaine qu'une telle hypothèse de fermeture est le plus utilisable. L'écoulement atmosphérique (turbulent à toutes les échelles, depuis la micro-échelle caractéristique de la turbulence de couche limite jusqu'à la macro-échelle caractéristique de la circulation générale du fluide atmosphérique) est en effet un des domaines dans lesquels l'application d'une théorie de la turbulence inhomogène serait le plus profitable. Sous sa forme actuelle l'approximation d'écrêtage, libre de toute hypothèse spécifique à la nature particulière du phénomène étudié, semble apte à résoudre certains de ces problèmes.

[1] IRREVERSIBLE INTERACTION BETWEEN CUMULANTS IN HOMOGENEOUS, ISOTROPIC, TWO-DIMENSIONAL TURBULENCE THEORY

The Physics of Fluids, Vol. 17, No. 1, Janvier 1974.

Irreversible interaction between cumulants in homogeneous, isotropic, two-dimensional turbulence theory

Jean-Claude André*

National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado, 80302

(Received 24 July 1972; final manuscript received 27 July 1973)

The hierarchy describing homogeneous and isotropic two-dimensional turbulence is used to show that one of the effects of $(n+1)$-th order cumulants is to introduce a turbulent relaxation frequency (or eddy-damping rate) in the equation for the rate of change of n-th order cumulants. As a result, it is possible to construct a Markovian eddy-damped $(n+1)$-th order cumulant-discard approximation in which the eddy-damping rate simulates the irreversibility due to the infinite serie of cumulants with order greater than n. In the case of our Markovian eddy-damped quasi-normal approximation the governing equations for the evolution of the energy spectrum are compared to those of stochastic models like the generalized random phase approximation or the self-consistent field approximation.

I. INTRODUCTION

The analytical theory of turbulence constructed by means of the Navier–Stokes equations gives rise to the closure problem: These equations are nonlinear and consequently, the evolution of an n-th order cumulant involves higher order cumulants. A simple way to close this hierarchy is to assume that all the cumulants above n-th order vanish. However, the resulting n-th order cumulant-discard approximation has an important failure: It misrepresents irreversible relaxation to inviscid equipartition equilibrium because it is time reversible.[1] In order to describe this approach to equilibrium one must explicitly introduce irreversibility. This work is an attempt to show that in the hierarchy itself a turbulent irreversible mechanism exists. Furthermore, the fourth-order cumulant-discard approximation (or quasinormal approximation) leads to development of negative energy spectrum[2,3] and probably the fifth-order one does also.[4] This difficulty can also be ascribed to a lack of irreversibility or more precisely, since in this case molecular viscosity does not vanish, to an improper description of relaxation times.[1] A possible refinement of the quasinormal approximation is the Markovian eddy-damped quasinormal approximation.[1,5] In this approximation, irreversibility is present and realizability can be demonstrated.[5,6]

In the first part of this study (Secs. II, III, and IV) we shall develop general considerations about the structure of the hierarchy describing homogeneous turbulence. It will be shown that under adequate assumptions some terms in the equations act as eddy-damping rates. The results of these sections only apply to two-dimensional turbulence, but it might be possible to develop a similar method to study the three-dimensional case. In Secs. V and VI these considerations will be used to construct an irreversible Markovian eddy-damped n-th order cumulant-discard approximation. Finally, in Secs. VII and VIII we shall emphasize the Galilean noninvariance of this method and compare its lowest-order application (Markovian eddy-damped quasinormal approximation) to other models.[6–9]

II. DERIVATION OF THE HIERARCHY OF EQUATIONS FOR HOMOGENEOUS TURBULENCE

We shall deal with an ensemble of flows of an incompressible fluid and we shall assume that the ensemble mean flow is homogeneous with zero mean velocity. If each flow is periodic in space, with period length L in each coordinate direction, the Fourier transform of the Navier–Stokes equations can be written:

$$\left(\frac{d}{dt}+\nu k^2\right)u_\alpha(\mathbf{k}) = -\tfrac{1}{2}iD_{\alpha\rho\sigma}(\mathbf{k})\sum_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}}u_\rho(\mathbf{p})u_\sigma(\mathbf{q}),$$
$$k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}, \tag{1}$$

where ν is the molecular viscosity, $u_\alpha(\mathbf{k})$ is the Fourier transform of the d-dimensional velocity field

$$u_\alpha(\mathbf{k}) = L^{-d}\int_0^L v_\alpha(\mathbf{x})\exp(-i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})\,d\mathbf{x},$$

and $D_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k})$ is a geometrical tensor defined by

$$D_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) = k_\beta\Delta_{\alpha\gamma}(\mathbf{k}) + k_\gamma\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}),$$
$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta/k^2. \tag{2}$$

In Eq. (2) the Kronecker symbol $\delta_{\alpha\beta}$ represents advective effects and the term $k_\alpha k_\beta/k^2$ takes the pressure into account. When the period length L goes to infinity, we can define a small parameter, $\varepsilon = (2\pi/L)^d$, and we have $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\sum_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{k}$.

It is possible to define the cumulant tensors from the average properties of the velocity field as,[10]

$$T^{(2)\alpha\ \beta}_{\mathbf{k}\ -\mathbf{k}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\langle u_\alpha(\mathbf{k})u_\beta(-\mathbf{k})\rangle$$
$$T^{(3)\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{kpq}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}\langle u_\alpha(\mathbf{k})u_\beta(\mathbf{p})u_\gamma(\mathbf{q})\rangle,$$
$$T^{(4)\alpha\beta\gamma\delta}_{\mathbf{kpqr}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-3}\langle u_\alpha(\mathbf{k})u_\beta(\mathbf{p})u_\gamma(\mathbf{q})u_\delta(\mathbf{r})\rangle, \tag{3}$$
$$\vdots$$
$$T^{(n)\alpha\beta\cdots\gamma}_{\mathbf{kp}\cdots\mathbf{q}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-(n-1)}\langle u_\alpha(\mathbf{k})u_\beta(\mathbf{p})\cdots u_\gamma(\mathbf{q})\rangle,$$

Copyright © 1974 American Institute of Physics

where $\mathbf{k} + \mathbf{p} + \cdots + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ (homogeneity) but no subset of $(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \ldots, \mathbf{q})$ sums to zero.

Multiplying Eq. (1) by a suitable product of Fourier modes, we obtain, by taking ensemble averages and using definitions (3),

$$(d/dt + 2\nu k^2)T^{(2)}{}^{\alpha\ \beta}_{\mathbf{k}\ -\mathbf{k}} = -\tfrac{1}{2}iD_{\alpha\rho\sigma}(\mathbf{k})\int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} T^{(3)}{}^{\rho\sigma\ \beta}_{\mathbf{p}\mathbf{q}\ -\mathbf{k}}\,d\mathbf{p} + \left[\begin{matrix}\alpha\leftrightarrow\beta\\ \mathbf{k}\leftrightarrow-\mathbf{k}\end{matrix}\right], \tag{4}$$

$$[d/dt + \nu(k^2 + p^2 + q^2)]T^{(3)}{}^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{kpq}} = -\tfrac{1}{2}iD_{\alpha\rho\sigma}(\mathbf{k})\int_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{k}} T^{(4)}{}^{\rho\sigma\beta\gamma}_{\mathbf{rspq}}\,d\mathbf{r} - iD_{\alpha\rho\sigma}(\mathbf{k})T^{(2)}{}^{\beta\ \rho}_{\mathbf{p}\ -\mathbf{p}}T^{(2)}{}^{\gamma\ \sigma}_{\mathbf{q}\ -\mathbf{q}} + \left[\begin{matrix}\alpha\leftrightarrow\beta\\ \mathbf{k}\leftrightarrow\mathbf{p}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}\alpha\leftrightarrow\gamma\\ \mathbf{k}\leftrightarrow\mathbf{q}\end{matrix}\right] \tag{5}$$

$$[d/dt + \nu(r^2 + s^2 + p^2 + q^2)]T^{(4)}{}^{\rho\sigma\beta\gamma}_{\mathbf{rspq}} = -\tfrac{1}{2}iD_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r})\int_{\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{r}} T^{(5)}{}^{\lambda\mu\sigma\beta\gamma}_{\mathbf{lmspq}}\,d\mathbf{l} - iD_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r})\left\{\begin{matrix} T^{(2)}{}^{\sigma\ \lambda}_{\mathbf{s}\ -\mathbf{s}}T^{(3)}{}^{\beta\gamma\mu}_{\mathbf{pq}\mathbf{s}} \\ + T^{(2)}{}^{\beta\ \lambda}_{\mathbf{p}\ -\mathbf{p}}T^{(3)}{}^{\sigma\gamma\ \mu}_{\mathbf{sq}\ -\mathbf{s}-\mathbf{q}} \\ + T^{(2)}{}^{\gamma\ \lambda}_{\mathbf{q}\ -\mathbf{q}}T^{(3)}{}^{\sigma\beta\ \mu}_{\mathbf{sp}\ -\mathbf{s}-\mathbf{p}}\end{matrix}\right\} + \left[\begin{matrix}\rho\leftrightarrow\sigma\\ \mathbf{r}\leftrightarrow\mathbf{s}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}\rho\leftrightarrow\beta\\ \mathbf{r}\leftrightarrow\mathbf{p}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}\rho\leftrightarrow\gamma\\ \mathbf{r}\leftrightarrow\mathbf{q}\end{matrix}\right] \tag{6}$$

$$(d/dt + \nu\sum_{i=1}^{n} k_i^2)T^{(n)}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_n} = -\tfrac{1}{2}D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1)\int_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{k}_1} T^{(n+1)}{}^{\rho\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{rs}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n}\,d\mathbf{r} - iD_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1)\left\{\begin{matrix} T^{(2)}{}^{\rho\ \ \alpha_2}_{-\mathbf{k}_2\mathbf{k}_2}T^{(n-1)}{}^{\sigma\alpha_3\cdots\alpha_n}_{\mathbf{s}\mathbf{k}_3\cdots\mathbf{k}_n} \\ + \left[\begin{matrix}\alpha_2\leftrightarrow\alpha_3\\ \mathbf{k}_2\leftrightarrow\mathbf{k}_3\end{matrix}\right] + \cdots + \left[\begin{matrix}\alpha_2\leftrightarrow\alpha_n\\ \mathbf{k}_2\leftrightarrow\mathbf{k}_n\end{matrix}\right] \\ + \sum_{i+j=n+1}^{i\text{ or }j\neq 1\text{ or }2} T^{(i)}T^{(j)}\end{matrix}\right\} + \left[\begin{matrix}\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2\\ \mathbf{k}_1\leftrightarrow\mathbf{k}_2\end{matrix}\right] + \cdots + \left[\begin{matrix}\alpha_1\leftrightarrow\alpha_n\\ \mathbf{k}_1\leftrightarrow\mathbf{k}_n\end{matrix}\right]. \tag{7}$$

The symbol $\left[\begin{matrix}\alpha\leftrightarrow\beta\\ \mathbf{k}\leftrightarrow\mathbf{p}\end{matrix}\right]$ represents additional terms obtained by the indicated permutation of indices and wave vectors. The special terms, like the product of second-order cumulants in the equation for the rate of change of third order cumulants, result from the particular contribution of wave vectors $(\mathbf{r} = -\mathbf{p})$, $(\mathbf{s} = -\mathbf{q})$ and $(\mathbf{r} = -\mathbf{q})$, $(\mathbf{s} = -\mathbf{p})$ in the general fourth order moment $\langle u_\rho(\mathbf{r})u_\sigma(\mathbf{s})u_\beta(\mathbf{p})u_\gamma(\mathbf{q})\rangle$.[10]

III. TURBULENT IRREVERSIBILITY

Considering the set of equations (4)–(7) we see that the equation for the rate of change of $T^{(n)}$ involves a term of the form $\int T^{(n+1)}$. Then, it is necessary to make a closure approximation.

The first non-trivial cumulant-discard approximation, $T^{(4)} = 0$, (or quasi-normal approximation) was introduced by Millionshchikov,[11] Proudman and Reid,[12] and Tatsumi.[13] It gives good results for either a small Reynolds number or a small evolution time, but it is not satisfactory in other cases. Ogura[2,3] first showed that it can lead to development of negative energy spectrum. Later on, Orszag[1] proved that it misrepresents irreversible relaxation to inviscid equipartition equilibrium and showed that the improper description of relaxation times is responsible for the appearance of negative energy.

In the general case it is not possible to show that the nth order cumulant-discard approximation violates realizability, but it is probably true for $n = 5$. Indeed, Tanaka found the same basic difficulties for the evolution of a turbulence governed by the Burgers' equation.[4] On the other hand, the time reversibility of the n-th-order cumulant-discard approximation is inconsistent with an approach to equilibrium. Following Orszag's argument,[1] in the inviscid case, time reversibility of any finite-order, cumulant-discard approximation does not allow the approach to equilibrium in a stable way. Consequently, one possible source of irreversibility in the unclosed hierarchy is the infinite number of cumulants (stochastic irreversibility). This can be explained by considering that there is a loss of information through this infinite series of interacting cumulants and that this turbulent irreversible mechanism still exists in the limit $\nu \to 0$.

We shall first exhibit this mechanism when molecular viscosity is present.

IV. INTERACTION BETWEEN SUCCESSIVE ORDER CUMULANTS

In Eq. (7) there is no specific reason to assume that $\int T^{(n+1)}$ is small compared with the otner terms of the right-hand side. Indeed, even though the general $(n + 1)$-th order moment is $O(\varepsilon^n)$ when $\varepsilon \to 0$, its integral is $O(\varepsilon^{n-1})$ and is, *a priori*, of the same order of magnitude as the special terms $T^{(i)}T^{(j)}$ since $i + j = n + 1$.[1]

In the eddy-damped modification proposed by Orszag[1] for the quasi-normal approximation, the term $\int T^{(4)}$ in Eq. (5) is replaced by a term $-\mu_e T^{(3)}$, where μ_e is a positive coefficient called the eddy-damping rate. This modification explicitly introduces irreversibility and realizability is also insured if μ_e is large enough since in this case Eq. (5) becomes

$$[\nu(k^2 + p^2 + q^2) + \mu_e(k) + \mu_e(p) + \mu_e(q)]T^{(3)}{}^{\alpha\beta\gamma}_{\mathbf{kpq}} = -iD_{\alpha\rho\sigma}(\mathbf{k})T^{(2)}{}^{\beta\ \rho}_{\mathbf{p}\ -\mathbf{p}}T^{(2)}{}^{\gamma\ \sigma}_{\mathbf{q}\ -\mathbf{q}} + \left[\begin{matrix}\alpha\leftrightarrow\beta\\ \mathbf{k}\leftrightarrow\mathbf{p}\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}\alpha\leftrightarrow\gamma\\ \mathbf{k}\leftrightarrow\mathbf{q}\end{matrix}\right].$$

The eddy-damped quasinormal approximation is then similar to the Markovian eddy-damped quasinormal approximation[6] which is based on a soluble model for the Fourier modes (generalized Langevin equation).

We shall show that the eddy-damped modification can be justified from the hierarchy itself. Equation (7), which gives the time evolution of an arbitrary order cumulant, can be used to construct the equation for the rate of change of $T^{(n+1)}{}^{\rho\sigma\alpha_2\cdots}_{\mathbf{rs}\mathbf{k}_2\cdots}$. This equation has the symbolic form

$$\left[\frac{d}{dt} + \nu(r^2 + s^2 + k_2^2 + \cdots)\right] T^{(n+1)\rho\sigma\alpha_2\cdots}_{\mathbf{r}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots}$$

$$= -\tfrac{1}{2} D_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r}) \int_{\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{r}} T^{(n+2)\lambda\mu\sigma\alpha_2\cdots}_{\mathbf{l}\mathbf{m}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots} d\mathbf{l}$$

$$- iD_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r}) \sum_{i+j=n+2}^{i \text{ or } j \neq 1} T^{(i)} T^{(j)} + \begin{bmatrix} \rho \leftrightarrow \sigma \\ \mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{s} \end{bmatrix} + \cdots .$$

Let us isolate some special terms of the form $T^{(i)}T^{(j)}$, that is

$$-i(D_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r}) T^{(2)\lambda}_{-\mathbf{s}\,\sigma} T^{(n)\mu\,\alpha_2\cdots}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots} + D_{\sigma\lambda\mu}(\mathbf{s}) T^{(2)\lambda}_{-\mathbf{r}\,\rho} T^{(n)\sigma\,\alpha_2\cdots}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots}),$$

where $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \cdots + \mathbf{k}_n = \mathbf{0}$. In order to see how these two terms act on $T^{(n+1)}$ and consequently can modify the rate of change of $T^{(n)}$, we shall assume that

(i) $T^{(n+2)} = O$ [$(n+2)$th-order cumulant-discard approximation].

(ii) The relaxation time for $T^{(n+1)}$ is smaller than that for $T^{(n)}$. The only reason to make such an assumption is that the viscous relaxation frequency $\nu(r^2 + s^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2)$ for $T^{(n+1)}$ is typically greater than that for $T^{(n)}$: $\nu(k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2)$ since in a triangle with legs k_1, r, s, we generally have $r^2 + s^2 > k_1^2$. Then, the second assumption will be $d/dt\, T^{(n+1)} = 0$ and this will lead to a Markovian equation for $T^{(n)}$.

Under the above assumptions the equation for $T^{(n+1)}$ can be solved formally. We get

$$T^{(n+1)\rho\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} = -i\, T^{(n)\mu\,\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} \frac{D_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r}) T^{(2)\sigma\,\lambda}_{\mathbf{s}-\mathbf{s}} + D_{\sigma\lambda\mu}(\mathbf{s}) T^{(2)\rho\,\lambda}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}}}{\nu(r^2 + s^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2)}. \tag{8}$$

For convenience, we shall assume that the turbulence is isotropic; that is, the second-order cumulant tensor can be expressed as the product of a geometrical tensor by a function of the wavenumber, $T^{(2)}{}'_{\mathbf{k}-\mathbf{k}} = \Delta_{ij}(\mathbf{k})U(k)$, where $\Delta_{ij}(\mathbf{k})$ is given by Eq. (2).

In Eq. (8) the nth-order cumulant does not depend on $\mathbf{r}$ or $\mathbf{s}$ and, consequently, if we integrate this equation for $\mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{k}_1$, we find after some manipulations that the term involving $\int T^{(n+1)}$ in Eq. (7) is given by

$$-\tfrac{1}{2} D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) \int_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{k}_1} T^{(n+1)\rho\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} d\mathbf{r}$$

$$= -T^{(n)\mu\,\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} \int_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{k}_1} \frac{D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) D_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r}) \Delta_{\sigma\lambda}(\mathbf{s}) U(s)}{\nu(r^2 + s^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2)} d\mathbf{r}.$$

At this point we notice a difference between two- and three-dimensional space. Indeed, the continuity equation $k_\mu T^{(n)\mu}_{\mathbf{k}} \cdots = 0$ and the relation $k_{\alpha_1} D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) = 0$ in the two-dimensional case, imply

$$D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) T^{(n)\mu\,\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} = D_{\mu\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) T^{(n)\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n},$$

since for three dimensions we only have

$$k_{1,\mu}[D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) T^{(n)\mu\,\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} - D_{\mu\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) T^{(n)\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n}]$$

$$= k_{1,\nu}[D_{\nu\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) T^{(n)\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} - D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) T^{(n)\nu\,\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n}] \neq 0,$$

where α_1, μ, and ν are all different and there is no summation over these indices. 77

We shall then restrict our discussion to the two-dimensional case. It is may be possible to find another approximation which generalizes the following sections for three-dimensional turbulence since the structural properties which are used are the same in both cases, the only difference being that in two-dimensional space contracted products of tensors are simpler.

For two-dimensional turbulence we then have

$$-\tfrac{1}{2} D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1) \int_{\mathbf{r}+\mathbf{s}=\mathbf{k}_1} T^{(n+1)\rho\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} d\mathbf{r}$$

$$= -T^{(n)\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} \int_{\mathbf{r}+\mathbf{s}+\mathbf{k}_1=\mathbf{0}} \frac{B_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{r}, \mathbf{s}) U(s)}{\nu(r^2 + s^2 + k_2^2 + \cdots + k_n^2)} d\mathbf{r},$$

where $B_2(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \mathbf{s}) = B_2(k, r, s) = -D_{\mu\rho\sigma}(\mathbf{k}) D_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r}) \Delta_{\sigma\lambda}(\mathbf{s})$ is a geometrical coefficient which is the same as that appearing in the direct-interaction approximation.[14] It is given by

$$B_2(k, r, s) = (k^2 - s^2)(r^2 - s^2) \times \frac{(-k^4 - r^4 - s^4 + 2k^2r^2 + 2k^2s^2 + 2r^2s^2)}{4k^2r^2s^2}$$

and is typically positive since

$$B_2(k, s, r) + B_2(k, s, r) = A_2(k, r, s),$$

$$A_2(k, r, s) = D_{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{k}) \Delta_{\beta\delta}(\mathbf{r}) \Delta_{\gamma\rho}(\mathbf{s}) D_{\alpha\delta\rho}(\mathbf{k}) \geq 0.$$

Consequently, a typical effect of $(n+1)$th-order cumulants is the damping of the nth order ones.

V. MARKOVIAN EDDY-DAMPED NTH-ORDER CUMULANT-DISCARD APPROXIMATION

The results of the preceding section can now be applied as follows. Since each cumulant $T^{(i+1)}$ damps the buildup of ith-order cumulants $T^{(i)}$ which, in turn, damp the buildup of $(i-1)$th-order ones, we shall consider that an effect of the infinity of cumulants of order $i \geq n+2$ is to introduce an eddy-damping rate ${}^{(n+1)}\mu_e$ in the equation for the rate of change of $T^{(n+1)}$. This eddy-damping rate must be supposed unknown, but we shall see that a relation between ${}^{(n+1)}\mu_e$ and ${}^{(n)}\mu_e$ can easily be derived.

According to the preceding remarks, the effect of the infinity of cumulants of order $i \geq n+2$ is such that, in the equation for the rate of change of $T^{(n+1)\rho\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n}$, the $\int T^{(n+2)}$ terms are approximated by

$$-\tfrac{1}{2} D_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r}) \int_{\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{r}} T^{(n+2)\lambda\mu\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{l}\mathbf{m}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} d\mathbf{l} + \begin{bmatrix} \rho \leftrightarrow \sigma \\ \mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho \leftrightarrow \alpha_2 \\ \mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \cdots + \begin{bmatrix} \rho \leftrightarrow \alpha_n \\ \mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{k}_n \end{bmatrix} = -[{}^{(n+1)}\mu_e(r) + {}^{(n+1)}\mu_e(s)$$

$$+ {}^{(n+1)}\mu_e(k_2) + \cdots + {}^{(n+1)}\mu_e(k_n)] T^{(n+1)\rho\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n}.$$

With this new equation for $T^{(n+1)\rho\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{s}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n}$, it is possible to calculate the damping effect of the $\int T^{(n+1)}$ terms of Eq. (7) by selecting the same two terms as in Sec. IV. But now assumption (i) is no more necessary thanks to the intro-

duction of ${}^{(n+1)}\mu_e$ and assumption (ii) is justified more than before since the relaxation frequency of $T^{(n+1)}$, which is the sum of a viscous and a turbulent part, is greater than the one for $T^{(n)}$ which is only due to viscous effects. A time integration of the equation for $d/dt\, T^{(n+1)\rho\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n}$ modifies Eq. (8) which now becomes

$$T^{(n+1)\rho\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} = -i\,T^{(n)\mu\ \alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n} \times \frac{D_{\rho\lambda\mu}(\mathbf{r})T^{(2)\sigma\ \lambda}_{\mathbf{s}-\mathbf{s}} + D_{\sigma\lambda\mu}(\mathbf{s})T^{(2)\rho\ \lambda}_{\mathbf{r}-\mathbf{r}}}{{}^{(n+1)}\mu(r) + {}^{(n+1)}\mu(s) + {}^{(n+1)}\mu(k_2) + \cdots + {}^{(n+1)}\mu(k_n)}, \tag{9}$$

where ${}^{(n+1)}\mu(k) = \nu k^2 + {}^{(n+1)}\mu_e(k)$.

Using this closure relation it is possible to re-evaluate the terms involving $\int T^{(n+1)}$ in Eq. (7). After some manipulations, similar to those described before, there follows for two-dimensional turbulence,

$$-\tfrac{i}{2}D_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1)\int_{r+s=k_1} T^{(n+1)\rho\sigma\alpha_2\cdots\alpha_n}_{\mathbf{r}\mathbf{k}_2\cdots\mathbf{k}_n}\,d\mathbf{r} = -T^{(n)\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_n}\int_{r+s+k_1=0} \times \frac{B_2(k_1,r,s)U(s)\,d\mathbf{r}}{{}^{(n+1)}\mu(r) + {}^{(n+1)}\mu(s) + {}^{(n+1)}\mu(k_2) + \cdots + {}^{(n+1)}\mu(k_n)}.$$

Assuming that ${}^{(n+1)}\mu(k_2) + \cdots + {}^{(n+1)}\mu(k_n) \cong (n-1)\,[{}^{(n+1)}\mu(k_1)]$, Eq. (7) becomes

$$\left[\frac{d}{dt} + \sum_{i=1}^{n} {}^{(n)}\mu(k_i)\right]T^{(n)\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_1\cdots\mathbf{k}_n} = -iD_{\alpha_1\rho\sigma}(\mathbf{k}_1)\left\{\begin{array}{l} T^{(2)\rho\ \alpha_2}_{-\mathbf{k}_2\mathbf{k}_2}T^{(n-1)\sigma\alpha_3\cdots\alpha_n}_{\mathbf{k}_3\cdots\mathbf{k}_n} \\ \quad + \left[\begin{matrix}\alpha_2\leftrightarrow\alpha_3\\ \mathbf{k}_2\leftrightarrow\mathbf{k}_3\end{matrix}\right] + \cdots + \left[\begin{matrix}\alpha_2\leftrightarrow\alpha_n\\ \mathbf{k}_2\leftrightarrow\mathbf{k}_n\end{matrix}\right] \\ \quad + \sum_{i+j=n+1}^{i\text{or}\,j\neq 1\text{or}2} T^{(i)}T^{(j)} \end{array}\right\} + \left[\begin{matrix}\alpha_1\leftrightarrow\alpha_2\\ \mathbf{k}_1\leftrightarrow\mathbf{k}_2\end{matrix}\right] + \cdots + \left[\begin{matrix}\alpha_1\leftrightarrow\alpha_n\\ \mathbf{k}_1\leftrightarrow\mathbf{k}_n\end{matrix}\right], \tag{10}$$

where the nth-order eddy-damping rate is given in terms of ${}^{(n+1)}\mu(k)$

$${}^{(n)}\mu_e(k) = \int_{r+s+k=0} \frac{B_2(k,r,s)U(s)\,d\mathbf{r}}{{}^{(n+1)}\mu(r) + {}^{(n+1)}\mu(s) + (n-1)[{}^{(n+1)}\mu(k)]}$$

$${}^{(n+1)}\mu(k) = \nu k^2 + {}^{(n+1)}\mu_e(k). \tag{11}$$

Equations (10) and (11) define a Markovian eddy-damped nth-order cumulant-discard approximation in which the equations for the rate of change of $T^{(i)}$ with $i \leq n-1$ are unchanged [Eqs. (4), (5), (6), ...]. Thanks to the introduction of the eddy-damping rate (besides the viscous one) in the last equation of the truncated system, the resulting approximation is clearly time irreversible. This eddy-damping rate ${}^{(n)}\mu_e$ takes the effect of the infinity of higher order cumulants into account.

VI. THE NTH-ORDER EDDY-DAMPING RATE

In order to solve the recurrence relation (11) it is necessary to have an additional equation. This can be done for high-order eddy-damping rates. Equation (11) can always be written as[6]

$${}^{(n)}\mu_e(k) = 2\int_{\Gamma(k)}\int \frac{B_2'(k,r,s)U(s)\,dr\,ds}{{}^{(n+1)}\mu(r) + {}^{(n+1)}\mu(s) + (n-1)[{}^{(n+1)}\mu(k)]}$$

where $B_2'(k,r,s) = B_2(k,r,s)/(1-x)^{1/2}$, x is the cosine of the angle opposite to k in the triangle with legs k, r, s, and $\Gamma(k)$ is that part of the positive quadrant of the (r,s) plane for which triangles with legs k, r, s can be formed.

It is possible to find wavenumbers r_0 and s_0 belonging to $\Gamma(k)$ such that

$${}^{(n)}\mu(k) - \nu k^2 = \frac{2\,B_2'(k,r_0,s_0)}{{}^{(n+1)}\mu(r_0) + {}^{(n+1)}\mu(s_0) + (n-1)[{}^{(n+1)}\mu(k)]}\int_{\Gamma(k)}\int U(s)\,dr\,ds.$$

Since the double integral of $U(s)$ converges, ${}^{(n)}\mu(k)$ is given by

$${}^{(n)}\mu(k) - \nu k^2 = \frac{f(k)}{{}^{(n+1)}\mu(r_0) + {}^{(n+1)}\mu(s_0) + (n-1)[{}^{(n+1)}\mu(k)]}.$$

We shall assume that ${}^{(n+1)}\mu(r_0) \cong {}^{(n+1)}\mu(s_0) \cong {}^{(n+1)}\mu(k)$. Therefore, the structure of ${}^{(n)}\mu(k)$ can be approximately obtained in studying a general relation of the form

$${}^{(n)}\mu(k) - \nu k^2 = \frac{f(k)}{(n+1)[{}^{(n+1)}\mu(k)]}. \tag{12}$$

Assuming that the series ${}^{(n)}\mu(k)$ defined by Eq. (12) has a limit ${}^{(\infty)}\mu(k)$, this limit is given by either (i) ${}^{(\infty)}\mu(k) = 0$, ${}^{(\infty)}\mu_e(k) = -\nu k^2$, or (ii) ${}^{(\infty)}\mu(k) = \nu k^2$, ${}^{(\infty)}\mu_e(k) = 0$.

The first solution must be rejected for physical reasons. Indeed, we expect that high-order cumulants relax very rapidly. That is not the case for the first solution which shows that the relaxation time $(1/\mu)$ is infinite. Then, the only correct solution is the second one. It implies that the influence of the $(n+1)$th-order cumulant becomes very small compared with the viscous term in the equation for the rate of change of the nth order cumulant as n goes to infinity.

Equation (12) gives more information about the structure of ${}^{(n)}\mu_e(k)$ for n very large such that

$${}^{(n)}\mu_e(k) \ll \nu k^2. \tag{13}$$

Indeed, one can show that in this case ${}^{(n)}\mu_e(k)$ decreases as n^{-1}

$$n[{}^{(n)}\mu_e(k)] \cong (n+1)[{}^{(n+1)}\mu_e(k)]. \tag{14}$$

Equations (11) and (14) can be used to compute any nth-order eddy-damping rate as follows:

A very high-order eddy-damping rate ${}^{(n_0)}\mu_e(k)$ is calculated with the aid of Eqs. (11) and (14) and from ${}^{(n_0)}\mu_e(k)$, ${}^{(n)}\mu_e(k)$ is determinated by Eq. (11).

These considerations were tested numerically. The numerical methods are those described by Leith.[6] The k space is logarithmically subdivided into 50 parts between $k = 1$ and $k = 4096$ and the integration over $\Gamma(k)$ is performed by a rectangular approximation.[6] The modal energy spectrum used in all the computations to be reported is

$$U(s) = \frac{v_{\text{rms}}^2}{\pi s_0^2} e^{-s/s_0}, \qquad s_0 = 4, \quad v_{\text{rms}} = 1 \qquad (15)$$

With $n_0 = 100$, the resulting variations of ${}^{(n)}\mu_e(k)$ for different n are reported in Fig. 1. For all n, ${}^{(n)}\mu_e(k)$ has almost the same dependence with respect to k. Figure 2 shows the variations of ${}^{(n)}\mu_e(k_0)$ with respect to n for different k_0 for the same experiment. For $k_0 = 256$ ($k_0 = 1024$), $\nu k_0^2 \cong 1.3\,10^3 (s^{-1})$ [$\nu k_0^2 \cong 2\,10^4 (s^{-1})$] is much greater than ${}^{(50)}\mu_e(k_0) \cong 2(s^{-1})$ and, in fact, ${}^{(n)}\mu_e(k_0)$ varies like n^{-1} even for $n \cong 50$. For smaller k_0, inequality (13) no longer holds and ${}^{(n)}\mu_e(k_0)$ varies like $n^{-\alpha}$, where α runs continuously from 1 to $\frac{1}{2}$.

These numerical calucations show that the additional equation (14) is consistent with the general recurrence relation (11), and that it can effectively be used to compute a "starting point" ${}^{(n_0)}\mu_e(k)$.

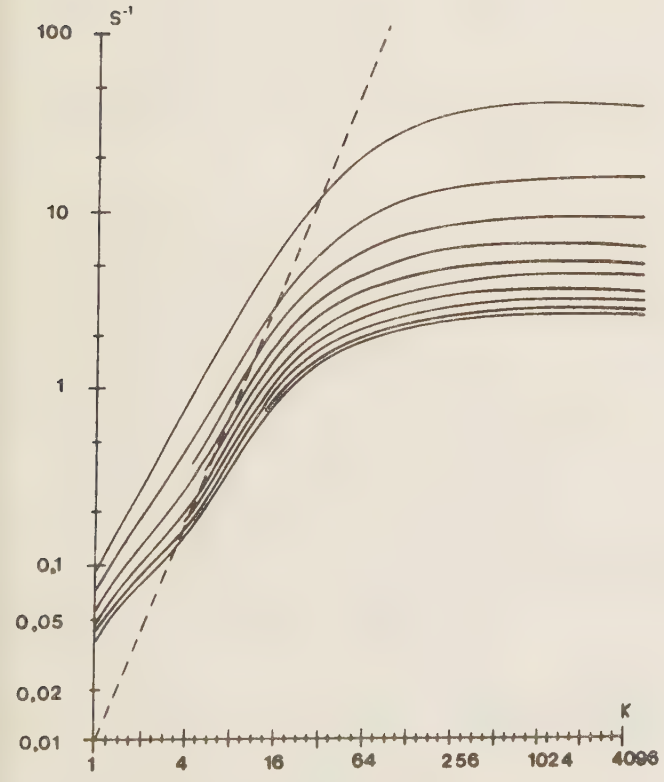

FIG. 1. Nth-order eddy-damping rate as a function of wavenumber k for different values of n. From the bottom to the top: $n = 48, 43, 38, 33, 28, 23, 18, 13, 8, 3$. The dashed line is the viscous-damping rate νk^2 [$\nu = 10^{-2} (m^2/s)$].

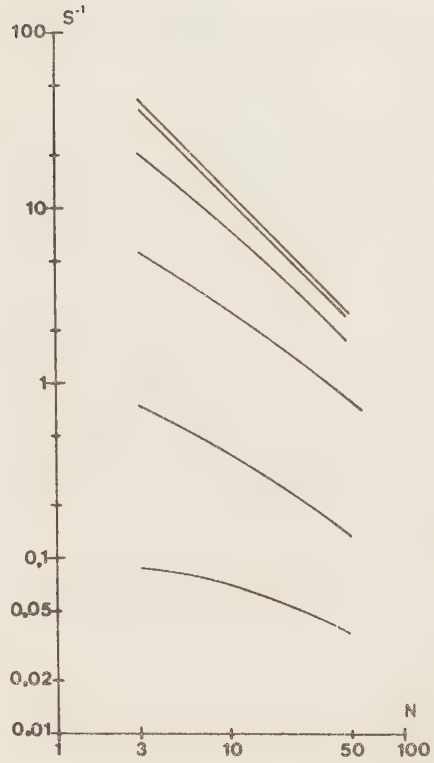

FIG. 2. Nth-order eddy-damping rate as a function of n for different wavenumbers k_0. From the bottom to the top: $k_0 = 1, 4, 16, 64, 256, 1024$.

VII. RANDOM GALILEAN INVARIANCE

The unclosed hierarchy described homogeneous and isotropic turbulence is invariant under random Galilean transformations.[10] Such transformations (with a Gaussian distribution for the convecting velocities) leave all the cumulants unchanged except $U(s)$ which becomes

$$U(s) + \frac{u_0^2}{\pi(d-1)^2} \frac{\delta(s)}{s^{d-1}},$$

where $\delta(s)$ is the Dirac distribution [$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s)\,ds = 1$], u_0^2 is the rms velocity of the distribution, and d is the dimensionality of space.

Under this change the nth-order eddy-damping rate becomes (for two-dimensional turbulence):

$$\begin{aligned} &{}^{(n)}\mu_e(k) \\ &\quad + 2\frac{u_0^2}{\pi} \int_{\Gamma(k)} \int \frac{B_2'(k,r,s)\delta(s)\,dr\,ds}{s\{{}^{(n+1)}\mu(r) + {}^{(n+1)}\mu(s) + (n-1)[{}^{(n+1)}\mu(k)]\}} \\ &\quad = {}^{(n)}\mu_e(k) + \frac{u_0^2}{\pi} \lim_{s \to 0} \frac{2sB_2'(k,k,s)}{s\{{}^{(n+1)}\mu(s) + n[{}^{(n+1)}\mu(k)]\}} \\ &\quad = {}^{(n)}\mu_e(k) + 2\frac{u_0^2}{\pi} \cdot \frac{k^2}{{}^{(n+1)}\mu_e(0) + n[{}^{(n+1)}\mu(k)]}. \end{aligned}$$

This contradiction with random Galilean invariance is due to the fact that, for the present method, only some special terms of the form $T^{(2)}T^{(n)}$ are selected on the right-hand side of the equation for the rate of change of $T^{(n+1)}$. Although the sum of all of these terms is invariant, it is not the case for each particular term.

VIII. COMPARISON WITH OTHER TURBULENCE THEORIES

At this point it is interesting to make a general comparison between the previous study and some other theories like the generalized random phase approximation,[8] the self-consistent field approach,[7] and the test-field model.[9] These theories do not have nth-order cumulants as ingredients, and they deal only with the second-order products of the velocity field (energy spectrum and time-displaced covariance). Therefore, in order to compare our study with these approximations, we have to consider the simplest Markovian eddy-damped nth-order cumulant-discard approximation. When $n = 4$, we obtain the Markovian eddy-damped quasinormal approximation where the eddy-damping rate is ${}^{(3)}\mu_e(k)$. In this approximation the modal energy spectrum $U(k)$ obeys (for two-dimensional isotropic turbulence):

$$(d/dt + 2\nu k^2)U(k) = \int_{k+p+q=0} \frac{B_2(k,p,q)[U(p)U(q) - U(k)U(q)]\,d\mathbf{p}}{\mu(k) + \mu(p) + \mu(q)}$$

$$\mu(k) = \nu k^2 + \mu_e(k), \tag{16}$$

and $\mu_e(k)$ can be given by either $\mu_e(k) = {}^{(3)}\mu_e(k)$ for the present iterative method or by

(i)

$$\mu_e(k) = \int_{r+s+k=0} \frac{B_2(k,r,s)U(s)}{\mu(r) + \mu(s) + \mu(k)}\,d\mathbf{r}, \tag{17}$$

for Edwards' generalized random phase approximation;

(ii)

$$\mu_e(k) = \int_{r+s+k=0} \frac{B_2(k,r,s)U(s)}{\mu(r) + \mu(s)}\,d\mathbf{r}, \tag{18}$$

for Herring's self-consistent field approximation;

(iii)

$$\mu_e(k) = \int_{r+s+k=0} \frac{B_G(k,r,s)U(s)}{\mu(r) + \mu(s) + \mu(k)}\,d\mathbf{r},$$

for Kraichnan's test-field model (with a dimensionless parameter equal to (1)), where

$$B_G(k,r,s) = \frac{(-k^4 - r^4 - s^4 + 2k^2r^2 + 2k^2s^2 + 2r^2s^2)^2}{16k^2r^2s^2};$$

(iv)

$$\mu_e(k) = \gamma k^2[U(k)]^{1/2},$$

for Leith's phenomenological theory where $\gamma = 0.8$ to match atmospheric two-dimensional turbulence.

Numerical results

All these eddy-damping rates have been calculated for a modal energy spectrum given by Eq. (15).

${}^{(3)}\mu_e(k)$ [based on a starting point ${}^{(n_0)}\mu_e(k)$ with $n_0 = 100$] corresponding to different values of the viscosity ν are plotted in Fig. 3 against the wavenumber k. When the Reynolds number increases (decreasing viscosity), the eddy-damping rate increases also but tends toward a limit. This means that for very large Reynolds numbers a mechanism exists which decorrelates the velocity components and this mechanism is only due to turbulent interactions. The viscosity, which was necessary to explain the birth of the eddy-damping rates chain described by Eq. (11), can then be eliminated in the limit of infinite Reynolds number flows.

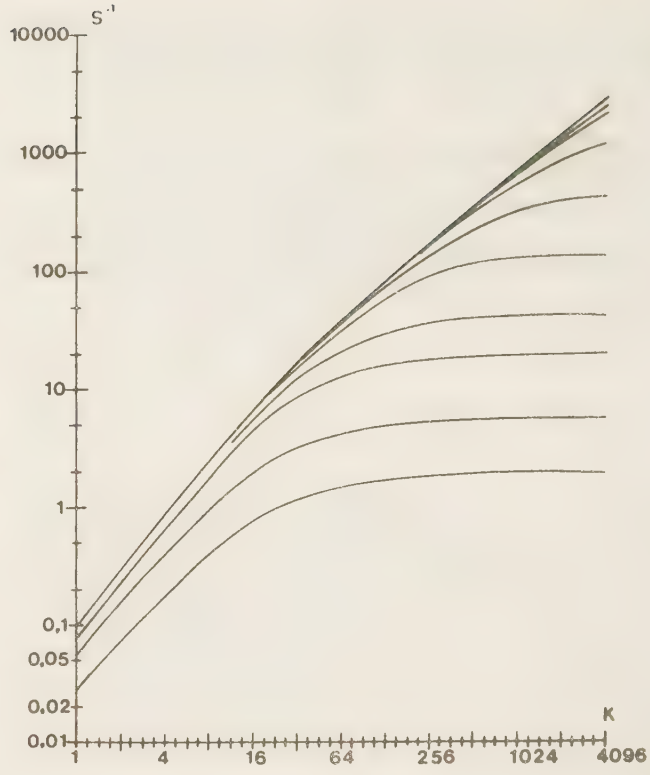

FIG. 3. Third-order eddy-damping rate as a function of wavenumber k for different values of the viscosity. From the bottom to the top: $\nu(m^2/s) = 2 \times 10^{-1}$, 7×10^{-2}, 2×10^{-2}, 10^{-2}, 3×10^{-3}, 10^{-3}, 3×10^{-4}, 10^{-4}, 5×10^{-5}, 2×10^{-5}.

In Figs. 4 and 5 ${}^{(3)}\mu_e(k)$, defined by the present iterative method, is compared to the eddy-damping rates calculated using the other four methods. For the first example, (Fig. 4), the viscosity is large [$\nu = 0.2(m^2/s)$], corresponding to $R_\lambda = 1.15$, where R_λ is the Reynolds number based on Taylor's microscale. In this case all the eddy-damping rates are small compared with the viscous-damping rate. The main difference between the various approximations is that in the test-field model and in the phenomenological theory the eddy-damping rate is a maximum for $k = 8$ or $k = 16$ since it is never decreasing for the other three methods. This is due to the fact that the geometrical coefficient $B_2(k,r,s)$ [on the contrary of $B_G(k,r,s)$] does not insure the random Galilean invariance of Eqs. (11), (17), and (18). Consequently, the eddy-damping rate cannot be local, where local is used in the sense of Kolmogorov.

For large Reynolds numbers [Fig. 5 where $\nu = 2 \times 10^{-5}(m^2/s)$ or $R_\lambda = 1.15 \times 10^4$] the self-consistent field approximation, the generalized random phase approximation, and the iterative method give very close results. Let us define two wavenumbers k_0 such that $E(k)$ is a maximum, and k_1 such that $k^2E(k)$ is a maximum.

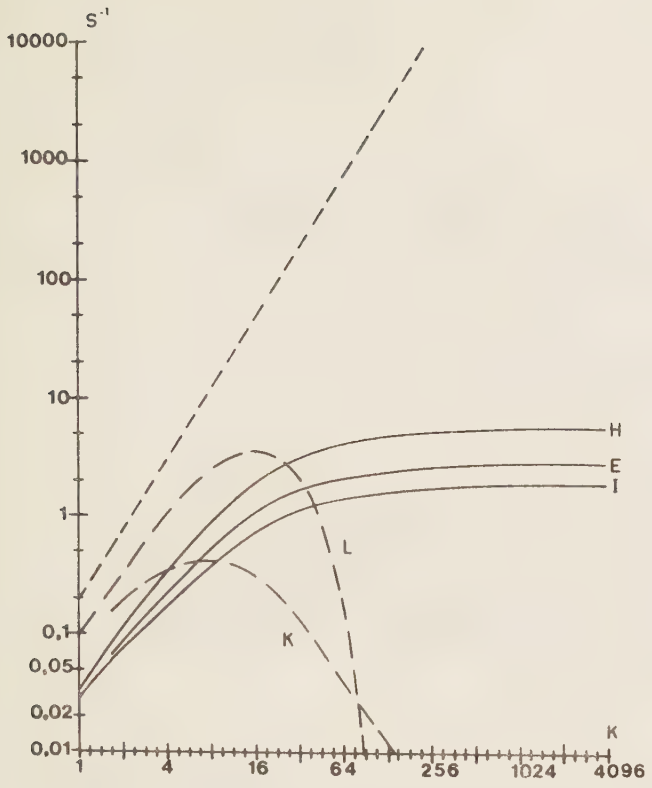

FIG. 4. Eddy-damping rates as a function of wavenumber k for different approximations (E is for Edward's, H is for Herring's, K is for Kraichnan's, L is for Leith's and I is for the present method). The dashed line is the viscous-damping rate νk^2 for $\nu = 2 \times 10^{-1} (m^2/s)$.

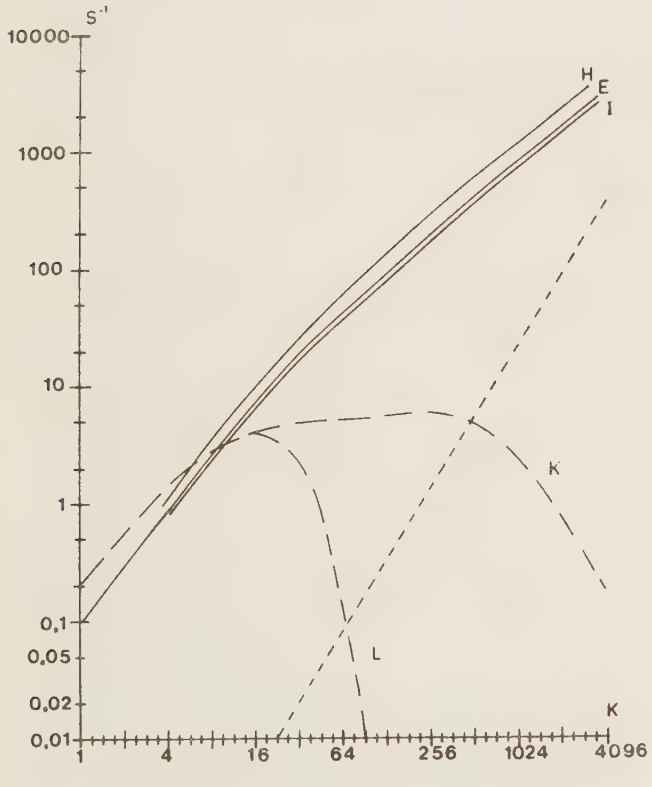

FIG. 5. Same as Fig. 4 but for $\nu = 2 \times 10^{-5} (m^2/s)$.

The domain lying between k_0 (energy containing wavenumber) and k_1 (dissipation wavenumber) can then be considered as an inertial region. In this range, between $k_0 = 4$ and $k_1 = 12$, the five eddy-damping rates have the same shape and the same order of magnitude. But once again the three nonlocal approximations overestimate the eddy-damping rate for large wave numbers. These small differences between the various eddy-damping rates probably do not lead to large discrepancies in the structure of the energy transfer.[9,15]

XI. CONCLUSION

The structure of the hierarchy describing homogeneous and isotropic turbulence indicates, at least for the two-dimensional case, that one effect of the $(n + 1)$th-order cumulants is to damp the buildup of the nth-order ones. This damping decreases with increasing order. As a result it is possible to construct a Markovian eddy-damped nth-order cumulant-discard approximation where the eddy-damping rate explicitly introduces irreversibility. The lowest-order application of this result (Markovian eddy-damped quasinormal approximation) shows that the resulting governing equations for the evolution of the energy spectrum are similar to those of some stochastic models. In the limit of infinite Reynolds number flows all these methods give the same kind of results in the inertial region.

ACKNOWLEDGMENTS

The author would like to thank Dr. C. E. Leith for encouragement and Dr. J. R. Herring for many valuable discussions and suggestions during the course of this research.

This work was partly accomplished when the author was visiting the National Center for Atmospheric Research under a grant of the Délégation Générale à la Recherche Scientifique et Technique. The National Center for Atmospheric Research is sponsored by the National Science Foundation.

* Present address: Météorologie Nationale, E.E.R.M./P.N., Paris, France.

[1] S. A. Orszag, J. Fluid Mech. **41**, 363 (1970).
[2] Y. Ogura, Phys. Fluids **5**, 395 (1962).
[3] Y. Ogura, J. Fluid Mech. **16**, 33 (1963).
[4] H. Tanaka, **47**, 373 (1969).
[5] S. A. Orszag, *The Statistical Theory of Turbulence* (Cambridge University Press, Cambridge) (to be published).
[6] C. E. Leith, J. Atmos. Sci. **28**, 145 (1971).
[7] J. R. Herring, Phys. Fluids **8**, 2219 (1965).
[8] S. F. Edwards, J. Fluid Mech. **18**, 239 (1964).
[9] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **47**, 525 (1971).
[10] S. A. Orszag and M. D. Kruskal, Phys. Fluids **11**, 43 (1968).
[11] M. Millionshchikov, C.R. (Dokl.) Acad. Sci. URSS **32**, 615 (1941).
[12] I. Proudman and W. H. Reid, Philos. Trans. R. Soc. Lond. **A247**, 163 (1954).
[13] T. Tatsumi, Proc. Roy . Soc. Lond. **A239**, 16 (1957).
[14] R. H. Kraichnan, J. Fluid Mech. **5**, 497 (1959).
[15] J. R. Herring and R. H. Kraichnan, in *Statistical Models and Turbulence*, edited by M. Rosenblatt and C. Van Atta (Springer Verlag, Berlin, 1971), pp. 148, 194.

[2] TURBULENCE APPROXIMATION FOR INHOMOGENEOUS FLOWS

PART I . THE CLIPPING APPROXIMATION

Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 33, No. 3, Mars 1976.

En collaboration avec G. DE MOOR, P. LACARRERE et R. du VACHAT.

Turbulence Approximation for Inhomogeneous Flows: Part I. The Clipping Approximation

J. C. André, G. De Moor, P. Lacarrère and R. du Vachat

Météorologie Nationale, EERM/GMD, Paris, France

(Manuscript received 6 February 1975, in revised form 3 December 1975)

ABSTRACT

A modification of the quasi-normal theory is proposed for the study of inhomogeneous turbulent flows. In this approimation realizability conditions for third-order correlations are enforced. These conditions are based on generalized Schwarz' inequalities which limit the growth of triple correlations and the approximation consists in "clipping" these last quantities when they violate their respective inequalities. By requiring that the inequalities be satisfied, we take into account the damping effect of fourth-order correlations. The equations corresponding to this approximation are derived for the case of inhomogeneous turbulence in a Boussinesq fluid with the aid of a recently proposed hypothesis for pressure correlation terms.

1. Introduction

Theories of turbulence constructed by means of the Navier–Stokes and thermodynamic equations give rise to the closure problem. In these equations the advection terms are nonlinear in the second order and consequently the evolution of an ith order correlation will involve $(i+1)$ order correlations. For example, second-order terms such as the Reynolds stresses will appear in the equation for the rate of change of the mean velocity. An attempt to derive the equations governing double correlations would lead to the introduction of new unknowns, chiefly third-order correlations, and so on. As a result the exact system describing turbulent flows is an infinite hierarchy and it is then necessary to introduce a further hypothesis called a closure assumption.

In the case of vertically inhomogeneous turbulence, which is relevant for many geophysical micro-turbulence problems, different kinds of closure assumptions are now available. A "practical" closure assumption should be simple enough, but also sufficiently general, to describe various turbulent situations.

One usually distinguishes two kinds of closure approximations which lead to different turbulence theories: the semi-empirical approach which is based on phenomenological relations between low-order correlations and the mean flow, on the one hand; and the higher-order-closure approach where the closure assumption is made on higher order correlation terms, on the other hand.

The semi-empirical theories of turbulence postulate that the Reynolds stresses are related to the mean velocity gradients in the same way as in viscous flow theory. Proportionality of the local turbulent fluxes to the local mean gradients then leads to the introduction of unknown positive eddy viscosities K. An important consequence of this assumption is that the Reynolds stress and the mean flow deformation have always the same sign so that the turbulent flow continuously extracts kinetic energy from the mean flow. Unfortunately, this is not necessarily true in geophysical flows, as can be seen for large-scale atmospheric turbulence (Starr, 1968) or for turbulent convection (Deardorff, 1966; Türner, 1973). Improved semi-empirical theories like the mixing length approach (Prandtl, 1925) or Smagorinsky's formulation (Smagorinsky, 1963) suffer from the same basic deficiency as shown by Monin and Yaglom (1971).

The higher-order-closure method consists in closing the hierarchy of dynamic equations at a higher order. One then has to derive the exact dynamic equations for second (or possibly higher) order correlations and the closure approximation affects only the next higher order correlations. One can consequently hope that the resulting theory will be more accurate for low-order correlations and mean values. A first example of such methods is the third-order closure technique as developed by Donaldson (1973), Wyngaard *et al.* (1974), Lumley and Khajeh-Nouri (1974) and Launder (1975), among others. In these studies the third-order correlations are modeled with the use of an ad hoc gradient-diffusion hypothesis or a functional expansion technique. Unfortunately, such a modeling of third-order correlations requires many undetermined constants, only a portion of which can be obtained from measurements in simple turbulent flows. A second example of such methods is the quasi-normal approximation (Millionshchikov, 1941; Proudman and Reid, 1954; Tatsumi, 1957) in which the fourth-order correlations are related to second-order correlations by assuming that velocity is a Gaussian random variable. Unfortunately, it was found that the quasi-normal approximation leads to the nonphysical development of negative energy (O'Brien and Francis, 1962; Ogura, 1962a, b, 1963). Similar closure approximation on higher order correlations seem to have the same basic defect (Kraichnan, 1962; Tanaka, 1969).

An alternative method which partially avoids the use of higher-order-closure techniques is the so-called subgrid-scale theory (e.g., Deardorff, 1972) in which the closure assumption is less crucial since the grid size is then sufficiently small to allow explicit description of most of the turbulent structures. But this requires a three-dimensional simulation, contrary to the preceding approaches, and the memory capacity of the computer restricts considerably the size of the domain which can thus be simulated.

The purpose of the present paper is to develop a new modification of the quasi-normal approximation in ordinary space, as required for studying inhomogeneous turbulence in a convenient framework. This modification is the "clipping" approximation which consists in enforcing realizability conditions for third-order correlations between velocity and/or temperature (Blanchet, 1970), thereby insuring positive values of energy. In such a method, third-order correlations without pressure fluctuations will be modeled without any adjustable numerical constant.

2. Modified quasi-normal approximations and the clipping approximation

In order to understand the reasons for the nonphysical features of the quasi-normal approximation and to develop a modified quasi-normal approximation, it is of interest to consider the ideal case of homogeneous turbulence.

In the quasi-normal approximation, the equations for second-order correlations (energy spectrum) and third-order correlations (energy transfer) are expressed exactly, but fourth-order correlations are expressed in terms of those of the second order, as if the velocity were a Gaussian random variable (Millionshchikov, 1941). In the case of advection of tagged fluid particles by a turbulent velocity field, for example, it has been shown analytically (Kraichnan, 1962) and numerically (O'Brien and Francis, 1962) that the mean concentration of the tagged particles and the mean square of the fluctuating concentrations become negative in some places. For homogeneous and isotropic turbulence, the quasi-normal approximation leads to the development of negative values of the energy density in the spectral range which originally contained most of the energy (Ogura, 1962a,b, 1963; Orszag, 1974). These deficiencies of the quasi-normal approximation can be traced to an excessive growth of third-order correlations (Orszag, 1970) since one effect of exact fourth-order correlations is to limit the buildup of triple correlations (André, 1974). This effect is lost in the quasi-normal approximation and must thus be replaced by an ad hoc damping mechanism in the equation for the rate of change of third-order correlations. This can be done in Fourier space by introducing an appropriate eddy-damping coefficient (Orszag, 1970; Kraichnan, 1971; Leith, 1971). For the resulting eddy-damped quasi-normal approximation it can then be demonstrated that the realizability conditions are preserved.

Returning now to the case of inhomogeneous turbulence, it can be seen that the above eddy-damped quasi-normal approximation cannot conveniently be generalized to include inhomogeneous effects. Indeed the above approximation deals with two-point correlations and more precisely with their Fourier transforms. This formalism would become very complicated for inhomogeneous turbulence and it would furthermore require a restatement of the equations (Kraichnan, 1972). But the basic idea of damping excessive triple correlations in an otherwise quasi-normal approximation can be applied in a framework consistent with a representation in ordinary space with possibly inhomogeneous and/or anisotropic conditions.

The clipping approximation is an example of such a damping mechanism. It is based on the fact that triple correlations between fluctuations of turbulent quantities must verify realizability conditions derived from generalized Schwarz' inequalities (Orszag and Kruskal, 1968; Blanchet, 1970). Given the fluctuations of three turbulent quantities α', β' and γ', the triple correlation $\overline{\alpha'\beta'\gamma'}$, where the overbar denotes an averaging operator, can be expressed as

$$\overline{\alpha'\beta'\gamma'} = \overline{\alpha'(\beta'\gamma' + C)}, \tag{1}$$

if C is a constant for the averaging operator. Now applying Schwarz' inequality to the right-hand side of Eq. (1), we have

$$\overline{\alpha'\beta'\gamma'}^2 \leqslant \overline{\alpha'^2}[\overline{\beta'^2\gamma'^2} + 2C\overline{\beta'\gamma'} + C^2].$$

We now minimize the right-hand side of the above inequality by taking C in the form

$$C = -\overline{\beta'\gamma'},$$

so that

$$\overline{\alpha'\beta'\gamma'}^2 \leqslant \overline{\alpha'^2}[\overline{\beta'^2\gamma'^2} - \overline{\beta'\gamma'}^2]. \tag{2}$$

It is clear from inequality (2) that the fourth-order correlation $\overline{\beta'^2\gamma'^2}$ imposes a limit on the development of $\overline{\alpha'\beta'\gamma'}$. If we now use the quasi-normal approximation

$$\overline{\beta'^2\gamma'^2} = \overline{\beta'^2}\,\overline{\gamma'^2} + 2\overline{\beta'\gamma'}^2$$

condition (2) for the realizability of the third-order correlation reads

$$|\overline{\alpha'\beta'\gamma'}| \leqslant [\overline{\alpha'^2}(\overline{\beta'^2}\,\overline{\gamma'^2} + \overline{\beta'\gamma'}^2)]^{\frac{1}{2}}, \tag{3}$$

or, by symmetry,

$$|\overline{\alpha'\beta'\gamma'}| \leqslant \min\begin{Bmatrix} [\overline{\alpha'^2}(\overline{\beta'^2}\,\overline{\gamma'^2} + \overline{\beta'\gamma'}^2)]^{\frac{1}{2}} \\ [\overline{\beta'^2}(\overline{\alpha'^2}\,\overline{\gamma'^2} + \overline{\alpha'\gamma'}^2)]^{\frac{1}{2}} \\ [\overline{\gamma'^2}(\overline{\alpha'^2}\,\overline{\beta'^2} + \overline{\alpha'\beta'}^2)]^{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

But now, nothing in the quasi-normal approximation makes it necessary that this inequality be satisfied. The clipping approximation consists in enforcing inequality (4) at each time step and at each grid-point by cutting off the value of the triple correlation $\overline{\alpha'\beta'\gamma'}$ whenever it exceeds the limit imposed by the realizability condition. This indeed constitutes a damping effect of third-order correlations, but only in a minimal way since it acts only to prevent the development of impossibly large third-order correlations. The principal advantage of the quasi-normal theory modified by the clipping approximation is that it produces realizable turbulent flows in the sense that the nonphysical development of negative energy is made impossible, as will be shown numerically. But the accuracy of the clipping approximation as a representation of physical turbulent flows remains to be demonstrated.

where ϵ is the dissipation rate of eddy kinetic energy $\bar{e}$, and where $e=\frac{1}{2}\overline{u_j'u_j'}$. On the basis of dimensional arguments, ϵ is chosen as

$$\epsilon=c_1\frac{\bar{e}^{\frac{3}{2}}}{l}, \tag{15}$$

where l is the typical length of energy-containing eddies. The molecular destruction rate of temperature variance will be simply taken as

$$2\lambda\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k}}=c_2\overline{T'^2}\frac{\epsilon}{\bar{e}}. \tag{16}$$

According to the modeling proposed by Donaldson (1973), the pressure transport terms will be chosen as

$$\frac{1}{\rho_0}\overline{p'u_i'}=-c_3\bar{e}^{\frac{1}{2}}l\frac{\partial\overline{u_i'u_k'}}{\partial x_k}, \tag{17}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\overline{p'T'}=-c_3\bar{e}^{\frac{1}{2}}l\frac{\partial\overline{u_k'T'}}{\partial x_k}, \tag{18}$$

where l is the same length as that appearing in (15). The correlation between pressure and velocity or temperature gradient will be modeled like return-to-isotropy terms (Launder, 1975):

$$\frac{1}{\rho_0}\overline{p'\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}\right)}=-c_4\frac{\epsilon}{\bar{e}}\left(\overline{u_i'u_j'}-\tfrac{2}{3}\delta_{ij}\bar{e}\right)$$
$$-c_5(P_{ij}-\tfrac{2}{3}\delta_{ij}P), \tag{19}$$

$$\frac{1}{\rho_0}\overline{p'\frac{\partial T'}{\partial x_i}}=-c_6\frac{\epsilon}{\bar{e}}\overline{u_i'T'}-c_7P_{iT}, \tag{20}$$

where P_{ij} is the total (dynamic and thermal) generation of Reynolds stress $\overline{u_i'u_j'}$

$$P_{ij}=-\left(\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_k}+\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k}\right)+\alpha g(\overline{u_i'T'}\delta_{3j}+\overline{u_j'T'}\delta_{3i}), \tag{21}$$

P the total generation of eddy kinetic energy

$$P=-\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k}+\alpha g\overline{u_i'T'}\delta_{3i}, \tag{22}$$

and P_{iT} the generation of heat flux $\overline{u_i'T'}$

$$P_{iT}=-\overline{u_k'T'}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_k}+\alpha g\overline{T'^2}\delta_{3i}. \tag{23}$$

We shall finally compute the third-order correlations between velocity and/or temperature using the quasi-normal theory modified by the clipping approximation. In this respect, the present approach differs notably from the third-order closure technique as mentioned in Section 1. We shall neglect the effects of molecular viscosity, molecular heat conductivity and pressure fluctuations in the equations for the rate of change of these triple correlation. As examples, under the above simplifying assumptions, the equations for $\overline{w'^3}$ and $\overline{w'T'^2}$ can be obtained as follows after some algebra:

$$\frac{\partial\overline{w'^3}}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial\overline{w'^3}}{\partial x_k}=-\frac{\partial\overline{u_k'w'^3}}{\partial x_k}+3\overline{w'^2}\frac{\partial\overline{u_k'w'}}{\partial x_k}$$
$$-3\overline{u_k'w'^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_k}+3\alpha g\overline{w'^2T'} \tag{24}$$

$$\frac{\partial\overline{w'T'^2}}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial\overline{w'T'^2}}{\partial x_k}=-\frac{\partial\overline{u_k'w'T'^2}}{\partial x_k}+\overline{T'^2}\frac{\partial\overline{u_k'w'}}{\partial x_k}+2\overline{w'T'}\frac{\partial\overline{u_k'T'}}{\partial x_k}$$
$$-\overline{u_k'T'^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_k}-2\overline{u_k'w'T'}\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_k}+\alpha g\overline{T'^3}. \tag{25}$$

The quasi-normal approximation, which asserts that fourth-order correlations are related to second-order ones as if velocity (and temperature) components were Gaussian random variables, i.e.,

$$\overline{u_k'w'^3}=3\overline{u_k'w'}\,\overline{w'^2}, \tag{26}$$

$$\overline{u_k'w'T'^2}=\overline{u_k'w'}\,\overline{T'^2}+2\overline{u_k'T'}\,\overline{w'T'}, \tag{27}$$

modifies Eqs. (24) and (25) into

$$\frac{\partial\overline{w'^3}}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial\overline{w'^3}}{\partial x_k}=-3\overline{u_k'w'}\frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial x_k}$$
$$-3\overline{u_k'w'^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_k}+3\alpha g\overline{w'^2T'}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial\overline{w'T'^2}}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial\overline{w'T'^2}}{\partial x_k}=-\overline{u_k'w'}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial x_k}-2\overline{u_k'T'}\frac{\partial\overline{w'T'}}{\partial x_k}-\overline{u_k'T'^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x_k}$$
$$-2\overline{u_k'w'T'}\frac{\partial\bar{T}}{\partial x_k}+\alpha g\overline{T'^3}. \tag{29}$$

In the clipping approximation the quasi-normal equations (28) and (29) are completed by enforcing the realizability inequalities obtained by specification of inequality (4); that is, Eqs. (28) and (29) are completed respectively by

$$|\overline{w'^3}|\leqslant(2\overline{w'^2}^3)^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

$$|\overline{w'T'^2}|\leqslant[\overline{T'^2}(\overline{w'^2}\,\overline{T'^2}+\overline{w'T'}^2)]^{\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

The clipping approximation is presented in this paper as an ad hoc scheme to correct the nonphysical consequences of the quasi-normal theory without reference to its relation with turbulent irreversibility. Readers interested in this problem are referred to the paper by Blanchet (1975).

3. Equations for a turbulent layer

In this section we shall apply the quasi-normal theory modified by the clipping approximation to inhomogeneous turbulence in a layer of small vertical extension, with the aid of recently proposed formulations for pressure correlation terms. We shall use the Boussinesq approximation which is known to be valid as long as the vertical extension of the turbulent layer is small compared to the scale height (Spiegel and Veronis, 1960).

We shall deal with a Boussinesq fluid of density ρ and of velocity $V=(u,v,w)=(u_i, i=1\text{–}3)$. We shall also consider that the flow is isentropic and that the external forces reduce to gravity g. The continuity, dynamic and thermodynamic equations can then be expressed as (e.g., Busch, 1973)

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\alpha g T\delta_{3i}+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\partial x_j}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial u_j T}{\partial x_j}=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_j}, \tag{7}$$

where T and p are respectively the deviation of temperature and pressure from a reference state in adiabatic and hydrostatic equilibrium, and where ρ_0 is the density of the reference state, ν the kinematic viscosity, λ the molecular heat conductivity, and α the coefficient of thermal expansion. The driving mechanism will be provided by a forcing at the lower boundary.

Applying to the above equations an averaging operator, which verifies the Reynolds axioms, and defining the turbulent fluctuations by $\alpha'=\alpha-\bar{\alpha}$, we easily obtain

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j}=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i}+\alpha g\bar{T}\delta_{3i}+\nu\frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j\partial x_j}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}+\bar{u}_j\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}=-\frac{\partial \overline{u_j'T'}}{\partial x_j}+\lambda\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j\partial x_j}. \tag{10}$$

The dynamic equations for second-order correlations $\overline{u_i'u_j'}$, $\overline{u_i'T'}$ and $\overline{T'^2}$ can be obtained in a similar manner (e.g., Donaldson, 1973):

$$\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}=-\frac{\partial \overline{u_i'u_j'u_k'}}{\partial x_k}-\overline{u_k'u_i'}\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}-\overline{u_k'u_j'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$$
$$+\alpha g(\overline{u_i'T'}\delta_{3j}+\overline{u_j'T'}\delta_{3i})-\frac{1}{\rho_0}\left(\overline{p'\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}+\overline{p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)$$
$$+\frac{1}{\rho_0}\left(\overline{p'\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}}+\overline{p'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right)+\nu\frac{\partial^2 \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k\partial x_k}-2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \overline{u_i'T'}}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial \overline{u_i'T'}}{\partial x_k}$$
$$=-\frac{\partial \overline{u_i'u_k'T'}}{\partial x_k}-\overline{u_k'u_i'}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}-\overline{u_k'T'}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}+\alpha g\overline{T'^2}\delta_{3i}$$
$$-\frac{1}{\rho_0}\overline{\frac{\partial p'T'}{\partial x_i}}+\frac{1}{\rho_0}\overline{p'\frac{\partial T'}{\partial x_i}}+\nu\overline{T'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k\partial x_k}}+\lambda\overline{u_i'\frac{\partial^2 T'}{\partial x_k\partial x_k}}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}+\bar{u}_k\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_k}$$
$$=-\frac{\partial \overline{u_k'T'^2}}{\partial x_k}-2\overline{u_k'T'}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k}+\lambda\frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_k\partial x_k}-2\lambda\overline{\frac{\partial T'}{\partial x_k}\frac{\partial T'}{\partial x_k}}. \tag{13}$$

At this point different kinds of closure hypotheses are needed. One has to model the correlations involving pressure fluctuations or gradients of fluctuating quantities and also the third-order correlations like $\overline{u_i'u_j'u_k'}$, $\overline{u_i'u_k'T'}$ and $\overline{u_k'T'^2}$.

We shall neglect the molecular diffusion-like terms, e.g.,

$$\nu\frac{\partial^2 \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k\partial x_k},\ \nu\overline{T'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_k\partial x_k}},\ \lambda\overline{u_i'\frac{\partial^2 T'}{\partial x_k\partial x_k}}\ \text{and}\ \lambda\frac{\partial^2 \overline{T'^2}}{\partial x_k\partial x_k},$$

since, in the case we consider, they are small compared to the turbulent diffusion terms represented by gradients of third-order correlations. According to the isotropy of dissipative scales, the molecular destruction rate of Reynolds stresses will be taken as

$$2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}=\frac{2}{3}\delta_{ij}\epsilon, \tag{14}$$

4. Conclusion

The clipping approximation, which consists in limiting the magnitude of triple correlations when they violate general realizability conditions, is a simple scheme to take into account the damping effect of fourth-order correlations on third-order ones. It will be shown numerically in the subsequent paper that it corrects the nonphysical consequences of quasi-normal theory since it maintains positive values of energy. Its justification consists in applying it in typically inhomogeneous cases which are well known experimentally and where a number of data are available to test the validity and accuracy of the model. In such cases the clipping approximation presents a number of advantages. Indeed, despite a complicated algebra, it allows taking full advantage of the horizontal homogeneity assumption and it is amenable to rapid numerical integration. In this respect the clipping approximation should be a convenient turbulence approximation for studying the statistical behavior of inhomogeneous flows and particularly those of geophysical interest.

Acknowledgments. The authors would like to thank Mr. J. Bessemoulin for encouragement and Prof. P. Morel for many valuable discussions and suggestions. The authors are also indebted to Mr. J. Blanchet for guidance during this research.

REFERENCES

André, J. C., 1974: Irreversible interaction between cumulants in homogeneous, isotropic, two-dimensional turbulence theory. *Phys. Fluids*, **17**, 15–21.

Blanchet, J., 1970: Étude statistique d'un système fluide—Application à la météorologie. *La Météorologie V*, **15**, 15–78.

——, 1975: Concepts nouveaux sur la mécanique de la turbulence. *La Météorologie VI*, **1**, 63–73; *Ibid.*, **2**, 47–56, *Ibid.*, **3**, (in press)

Busch, N. E., 1973: On the mechanics of atmospheric turbulence. *Workshop on Micrometeorology*, Boston, Amer. Meteor. Soc., 1–65.

Deardorff, J. W., 1966: The counter-gradient heat flux in the lower atmosphere and the laboratory. *J. Atmos. Sci.*, **23**, 503–506.

——, 1972: Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 91–115.

Donaldson, C. du P., 1973: Construction of a dynamic model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants. *Workshop on Micrometeorology*, Boston, Amer. Meteor. Soc., 313–392.

Kraichnan, R. H., 1962: The closure problem of turbulence theory. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. 13*, Providence, Amer. Math. Soc., 199–225.

——, 1971: An almost-Markovian Galilean-invariant turbulence model. *J. Fluid Mech.*, **47**, 513–524.

——, 1972: Test-field model for inhomogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, **56**, 287–304.

Launder, B. E., 1975: On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. *J. Fluid Mech.*, **67**, 569–581.

Leith, C. E., 1971: Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 145–161.

Lumley, J. L., and B. Khajeh-Nouri, 1974: Computational modeling of turbulent transport. *Advances in Geophysics*, Vol. 18A, Academic Press, 169–192.

Millionshchikov, M., 1941: On the theory of homogeneous and isotropic turbulence. *C. R. Acad. Sci. URSS*, **32**, 615–618.

Monin, A. S., and A. M. Yaglom, 1971: *Statistical Fluid Mechanics of Turbulence.* The MIT Press, 364–373.

O'Brien, E. E., and G. C. Francis, 1962: A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation. *J. Fluid Mech.*, **13**, 369–375.

Ogura, Y., 1962a: Energy transfer in a normally distributed and isotropic turbulent velocity field in two dimensions. *Phys. Fluids*, **5**, 395–401.

——, 1962b: Energy transfer in isotropic turbulent flow. *J. Geophys. Res.*, **67**, 3143–3149.

——, 1963: A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, **16**, 33–40.

Orszag, S. A., 1970: Analytical theory of turbulence. *J. Fluid Mech.*, **41**, 363–386.

——, 1974: The statistical theory of turbulence. *Proceedings of the 1973 Les Houches Summer School of Theoretical Physics*, Gordon & Breach (in press).

——, and M. D. Kruskal, 1968: Formulation of the theory of turbulence. *Phys. Fluids*, **11**, 43–60.

Prandtl, L., 1925: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech.*, **5**, 136–139.

Proudman, I., and W. H. Reid, 1954: On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A247**, 163–189.

Smagorinsky, J., 1963: General circulation experiments with the primitive equations: Part I, the basic experiment. *Mon. Wea. Rev.*, **91**, 99–164.

Spiegel, E. A., and G. Veronis, 1960: On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophys. J.*, **131**, 442–447.

Starr, V. P., 1968: *Physics of Negative Viscosity Phenomena*, McGraw-Hill, 47–68.

Tanaka, H., 1969: 0–5 th cumulant discard approximation of inviscid Burgers turbulence. *J. Meteor. Soc. Japan*, **47**, 373–383.

Tatsumi, T., 1957: The theory of decay process of incompressible isotropic turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, **A239**, 16–45.

Türner, J. S., 1973: *Buoyancy Effects in fluids*, Cambridge University Press, 234–239.

Wyngaard, J. C., O. R. Coté and K. S. Rao, 1974: Modeling the atmospheric boundary layer. *Advances in Geophysics*, Vol. 18A, Academic Press, 193–211.

[3] TURBULENCE APPROXIMATION FOR INHOMOGENEOUS FLOWS

PART II . THE NUMERICAL SIMULATION

OF A PENETRATIVE CONVECTION EXPERIMENT

Journal of the Atmospheric Sciences, Vol. 33, No. 3, Mars 1976.

En collaboration avec G. DE MOOR, P. LACARRERE et R. du VACHAT.

Turbulence Approximation for Inhomogeneous Flows: Part II. The Numerical Simulation of a Penetrative Convection Experiment

J. C. André, G. De Moor, P. Lacarrère and R. du Vachat

Météorologie Nationale, EERM/GMD, Paris, France

(Manuscript received 6 February 1975, in revised form 3 December 1975)

ABSTRACT

The quasi-normal theory modified by the clipping approximation is used to construct a numerical model of vertically inhomogeneous turbulence in a Boussinesq fluid. The pressure-correlation terms are expressed according to recently proposed formulations. With the aid of the horizontal homogeneity assumption the model is applied to the description of a laboratory experiment on penetrative convection and the numerical results are compared to the experimental data. It is found that the model does reproduce the measured vertical variations of mean temperature, turbulent heat flux, eddy kinetic energy and temperature variance, as well as a third-order correlation such as the vertical flux of eddy kinetic energy. The stationarity of the vertical profiles of various turbulent quantities, when scaled by the convective velocity and temperature, is also verified.

1. Introduction

In a preceding paper (André *et al.*, 1976; hereafter referred to as paper I) a new modification of the quasi-normal theory has been introduced: the clipping approximation, specially designed for inhomogeneous turbulent flows. This approximation takes into account the damping effect of fourth-order correlations on third order correlations by enforcing realizability conditions derived from generalized Schwarz' inequalities. The corresponding equations were expressed in the case of a turbulent layer of a Boussinesq fluid with the air of additional assumptions concerning dissipative and pressure terms.

To our knowledge there are few numerical models of inhomogeneous turbulence based on high-order approximations to the statistical theory of turbulence. Among them the models of Lewellen and Teske (1973) and of Wyngaard and Coté (1974) bear some resemblance to ours but they both have an ad hoc closure assumption with adjustable coefficients for third-order correlations between velocity and/or temperature.

We shall now present the first numerical results obtained with the clipping approximation for laboratory penetrative convection (Willis and Deardorff, 1974). The reasons for applying the turbulence model to laboratory penetrative convection is that such flows are well known experimentally and that a number of data are available to test the validity and accuracy of the model. In the laboratory experiment by Willis and Deardorff (1974) a layer of water is heated from below in a convection chamber whose width-height ratio is approximately equal to 2. As the quantity of heat supplied at the lower boundary increases, the convective turbulent layer thickens. Vertical profiles of mean temperature as well as of second (and even third) order correlations are then calculated from instantaneous measurements of velocity and temperature.

2. The simplified set of equations

Although the width of the convection chamber is only twice its height, the horizontal scale of significant variation of mean parameters in this experiment is much greater than the vertical scale. This leads to the assumption that the flow is statistically homogeneous in a horizontal plane, thereby considerably reducing the algebraic complexity of the problem and allowing, in turn, a very good spatial resolution in the one remaining dimension.

Since there is no mean horizontal velocity in this convection experiment, the continuity equation implies a zero mean vertical velocity, $\bar{w}=0$, and it is also consistent to assume that the vertical turbulent transfer of horizontal momentum vanishes, i.e., $\overline{u'w'}=\overline{v'w'}=0$.

With the aid of the above simplifying assumptions the set of equations describing thermal convection reduces to the following [from Eqs. (10) to (27) of paper I].

(a) One equation for the mean temperature:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}=-\frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z}, \tag{1}$$

where we have omitted the molecular diffusion of mean temperature $\lambda\partial^2\bar{T}/\partial x_j\partial x_j$.

(b) Four equations for the second-order correlations $\overline{w'T'}$ (turbulent heat flux), $\overline{w'^2}$ (vertical velocity variance), $\overline{e_h}$ [horizontal eddy kinetic energy, where $e_h=(u'^2+v'^2)/2$], and $\overline{T'^2}$ (temperature variance):

$$\frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial t}=-\frac{\partial \overline{w'^2T'}}{\partial z}-\overline{w'^2}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}+\alpha g\overline{T'^2}-c_1c_6\frac{\bar{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\overline{w'T'}$$
$$-c_7\alpha g\overline{T'^2}+c_3\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{e}^{\frac{1}{2}}l\frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial t}=-\frac{\partial \overline{w'^3}}{\partial z}-\frac{2}{3}c_1\frac{\bar{e}^{\frac{1}{2}}}{l}+(2-\tfrac{4}{3}c_5)\alpha g\overline{w'T'}$$
$$-c_1c_4\frac{\bar{e}^{\frac{1}{2}}}{l}(\overline{w'^2}-\tfrac{2}{3}\bar{e})+2c_3\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{e}^{\frac{1}{2}}l\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right), \tag{3}$$

$$\frac{\partial \overline{e_h}}{\partial t}=-\frac{\partial \overline{w'e_h}}{\partial z}-\frac{2}{3}c_1\frac{\bar{e}^{\frac{1}{2}}}{l}+\frac{2}{3}c_5\alpha g\overline{w'T'}-c_1c_4\frac{\bar{e}^{\frac{1}{2}}}{l}(\overline{e_h}-\tfrac{2}{3}\bar{e}), \tag{4}$$

$$\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}=-\frac{\partial \overline{w'T'^2}}{\partial z}-2\overline{w'T'}\frac{\partial \bar{T}}{\partial z}-c_1c_2\frac{\bar{e}^{\frac{1}{2}}}{l}\overline{T'^2}. \tag{5}$$

In Eqs. (2)–(5) we find $\bar{e}$ (the eddy kinetic energy, where $e=e_h+w'^2/2$) and the length l of the energy-containing eddies which we shall consequently choose as the height z_i of the convective layer, i.e.,

$$l=z_i. \tag{6}$$

(c) Six equations for the third-order correlations $\overline{w'^3}$, $\overline{w'e_h}$, $\overline{w'^2T'}$, $\overline{w'T'^2}$, $\overline{e_hT'}$ and $\overline{T'^3}$. These equations are completed by realizability inequalities; the dual forms for each are as follows:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\overline{w'^3}}{\partial t}&=-3\overline{w'^2}\frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial z}+3\alpha g\overline{w'^2T'}\\ |\overline{w'^3}|&\leqslant(2\overline{w'^2}^3)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\overline{w'e_h}}{\partial t}&=-\overline{w'^2}\frac{\partial\bar{e}_h}{\partial z}+\alpha g\overline{e_hT'}\\ |\overline{w'e_h}|&\leqslant\bar{e}_h(\overline{w'^2})^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\overline{w'^2T'}}{\partial t}&=-2\overline{w'^2}\frac{\partial\overline{w'T'}}{\partial z}-\overline{w'T'}\frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial z}\\ &\quad-\overline{w'^2}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}+2\alpha g\overline{w'T'^2}\\ |\overline{w'^2T'}|&\leqslant[\overline{w'^2}(\overline{w'^2}\,\overline{T'^2}+\overline{w'T'}^2)]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\overline{w'T'^2}}{\partial t}&=-\overline{w'^2}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial z}-2\overline{w'T'}\frac{\partial\overline{w'T'}}{\partial z}\\ &\quad-2\overline{w'^2T'}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}+\alpha g\overline{T'^3}\\ |\overline{w'T'^2}|&\leqslant[\overline{T'^2}(\overline{w'^2}\,\overline{T'^2}+\overline{w'T'}^2)]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\overline{e_hT'}}{\partial t}&=-\overline{w'T'}\frac{\partial\bar{e}_h}{\partial z}-\overline{w'e_h}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\\ |\overline{e_hT'}|&\leqslant\bar{e}_h\,\overline{T'^2}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\overline{T'^3}}{\partial t}&=-3\overline{w'T'}\frac{\partial\overline{T'^2}}{\partial z}-3\overline{w'T'^2}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\\ |\overline{T'^3}|&\leqslant(2\overline{T'^2}^3)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

The values of the various numerical constants which appear in the equations for the second-order correlations were taken as

$$c_1=1.6 \tag{13}$$

$$c_2=2.5 \tag{14}$$

$$c_3=-0.004 \tag{15}$$

$$c_4=4.50, \qquad c_5=0 \tag{16}$$

$$c_6=4.85, \qquad c_7=0.394. \tag{17}$$

The value of c_2 is larger than that in the studies of Lewellen and Teske (1973), Deardorff (1974a) or Wyngaard and Coté (1974) for a reason which will be explained together with the temperature variance results in Section 4. Negative values of c_3 have been previously proposed by Donaldson (1973) and used by Lewellen and Teske (1973), but we retained a value of very small magnitude for c_3 since most of the kinetic energy diffusion results from the turbulent flux $\overline{w'e}$. The constants appearing in the return-to-isotropy terms are in fairly good agreement with Launder's prediction (1975), that is

$$\frac{1-c_5}{c_4}=0.225, \quad \frac{1-c_7}{c_6}=0.125.$$

This set of 11 prognostic equations requires a large number of initial and boundary conditions whose proper treatment is basically difficult. Nevertheless insensitivity of the numerical model to its initial conditions renders this problem less crucial.

As initial conditions we prescribe the vertical profile of the mean temperature. Second-order correlations are supposed to be zero through the layer except at the lowest level where they are taken according to surface layer similarity theory. Third-order correlations are set equal to zero through the whole layer. Little is known about these terms and our choice has been guided by simplicity alone.

The spatial grid is such that at the lower boundary we only have to prescribe second-order correlations. The basic quantity is then the positive kinematic heat flux Q_0 at the bottom of the convective layer, i.e.,

$$(\overline{w'T'})_{z=0}=Q_0. \tag{18}$$

The variances of vertical velocity and temperature are estimated in terms of Q_0 according to the free convection similarity theory in the surface layer (Wyngaard *et al.*, 1971):

$$\overline{w'^2}=a_1u_f^2, \quad u_f=(\alpha gQ_0z)^{\frac{1}{3}}, \quad a_1=1.8 \tag{19}$$

$$\overline{T'^2}=a_2T_f^2, \quad T_f=Q_0/u_f, \quad a_2=1.8. \tag{20}$$

On the other hand, the laboratory experiment (see also Businger, 1973, and Deardorff, 1974b) suggests that the horizontal velocity variance in the surface layer scales with the convective velocity w_* (Deardorff, 1970) according to

$$\bar{e}_h=a_3w_*^2, \quad w_*=(\alpha gQ_0z_i)^{\frac{1}{3}}, \quad a_3=0.4. \tag{21}$$

The upper boundary conditions are described below together with the spatial grid but they are less crucial since the vertical extension of the turbulent phenomena is limited by a strong thermal inversion.

3. The numerical scheme

a. The spatial grid

Examination of Eqs. (1)–(12) suggests that an important dynamical process is the vertical eddy diffusion. This suggests distributing the correlations on staggered

levels according to their respective order (Fig. 1).

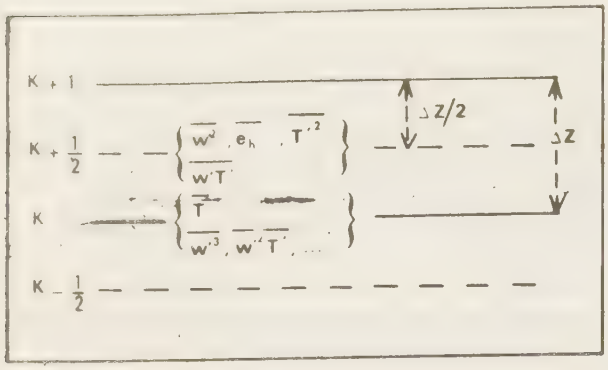

FIG. 1. The spatial grid. First- and third-order correlations are expressed on integer index levels, second-order correlations on fractional index levels.

Consequently, first- and third-order correlations will be expressed on integer index levels, and second-order correlations on fractional index levels. With such a simple grid, the equation for the rate of change of an ith order correlation, expressed at level k, involves, on the one hand, derivatives of $(i+1)$ or $(i-1)$ order correlations which will be computed using the centered finite-difference scheme applied between levels $(k+\frac{1}{2})$ and $(k-\frac{1}{2})$, while derivatives of ith order correlations will be computed with the centered finite-difference scheme applied between levels $(k+1)$ and $k-1)$ on the other hand. This same equation involves also values of $(i+1)$ or $(i-1)$ order correlations whose values will be the arithmetic mean of their values at the nearest levels $[(k+\frac{1}{2})$ and $(k-\frac{1}{2})]$.

At the upper boundary the spatial scheme is slightly different since we use, when necessary, backward (instead of centered) derivatives to prevent reflection at the highest level.

At the lower boundary, the first level is a level of fractional index $k=\frac{1}{2}$ (at altitude $z_{\frac{1}{2}}=1$ cm) where the second-order correlations are prescribed according to Eqs. (18)–(21). It is then possible to compute the mean temperature and the third-order correlations at level $k=1$ ($z_1=2$ cm) according to their prognostic equations [Eqs. (7)–(12)]. But in order to incorporate surface layer effects (Wyngaard *et al.*, 1971) inequalities (7)–(12) are enforced with a numerical constant equal to 0.2 multiplying their right-hand side.

We used a 50-level grid ($\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant 50$) with a grid size Δz ($\Delta z = z_j - z_{j-1}$) equal to 2 cm.

b. The time-integration scheme

If we assume that the vertical gradient of mean temperature is time-independent through the layer, and discard all nonlinear terms in Eqs. (2) to (12), we get a linearized system. This system describes only the internal gravity waves which are present in the turbulent layer; due to the equations for third-order correlations, the largest frequency, f_{max}, of these waves is three times the Brunt–Väisälä frequency (André and Lacarrère, 1975), i.e.,

$$f_{max} = 3\left(-\alpha g \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

In the case of stable stratification, $\partial \bar{T}/\partial z \geqslant 0$, the gravity waves are stable and their smallest period T_{min} is

$$T_{min} = \frac{2\pi}{3}\left(\alpha g \frac{\partial \bar{T}}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

In order to damp these short-period gravity waves, we chose the Euler-backward (Matsuno) time difference scheme which is known to have a strong damping effect on short-period oscillations (Lilly, 1965). The time step Δt we used is $\Delta t = 0.47$ s.

4. The numerical results

As a first test of the accuracy of the clipping approximation, the numerical model described in the preceding sections is applied to the simulation of the penetrative convection experiment in water by Willis and Deardorff (1974). In this laboratory experiment a layer of water is heated from below. The Reynolds number based on the rms velocity is of order 4000 and the Rayleigh number is of order 10^{11}. The initial conditions are a constant temperature distribution ($T=21$°C) in the first 50 cm and an overlying stable layer with a lapse rate of 0.16°C cm^{-1} (Case S1) or of 0.36°C cm^{-1} (Case S2).(a) All second- and third-order correlations are initially set equal to zero. At the lower boundary we imposed the kinematic heat flux $Q_0(t)$ chosen so as to fit the conditions of the experiment. The coefficient of thermal expansion is the same as indicated for the experimental study ($\alpha = 2.3\times10^{-4}$°C^{-1}). In order to compare with experimental data, the computed mean temperature as well as the computed second- and third-order correlations are time-averaged over 30 s, corresponding to the sampling interval of the laboratory experiment. Starting from the simple but crude initial conditions we chose, the numerical model needs a time interval to build up realistic values of turbulent quantities. In the present case, this buildup time is close to 150 s. After this time the various correlations, made dimensionless by the proper combination of convective velocity and temperature (Deardorff, 1970), are stationary as will be shown in Section 5.

(a) These values differ from those reported by Willis and Deardorff (1974) due to the fact they omitted a calibration factor of 0.8 (Willis and Deardorff, private communication).

a. Mean temperature and heat flux profiles

In Fig. 2 the computed temperature profiles are com-

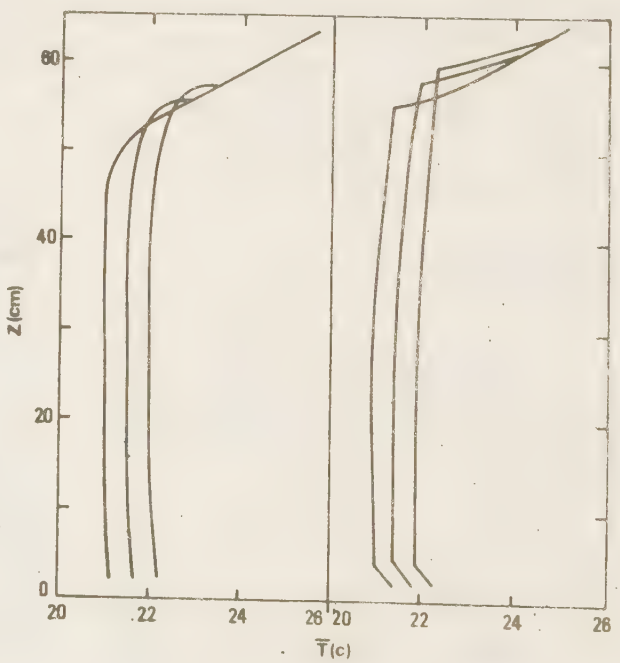

FIG. 2. Evolution of the mean temperature profile for Case S2. Left: laboratory measurements; right: numerical results. The three selected times are, from the left to the right, $t=150$ s, 255 s and 360 s from the beginning of experiment.

pared to experimental profiles in Case S2. Note the very good agreement between computed and experimental curves in the nearly adiabatic layer. Near the lower boundary a thermally unstable layer exists but its vertical extension is larger in the numerical simulation than in the laboratory experiment. This effect can be ascribed to the vertical resolution of the numerical model since the first two levels ($k=1$, 2) where mean temperature is computed are at altitudes $z_1=2$ cm and $z_2=4$ cm, when the altitude of the lowest measurement of temperature was 1.5 cm. As in the laboratory experiment, the computed profiles of mean temperature show increasing stability as the inversion level is approached. The cooling of the upper layer is also recovered and the height of the convective layer as well as the lapse rate around the inversion level are in rather good agreement with experiment. This is an indirect verification of the validity of our turbulence closure hypothesis since it is known that the erosion of the overlying stable layer depends strongly on the treatment of turbulent fluxes (Deardorff, 1973; Sommeria, 1974).

The height z_i of the convective layer, which appears in Eq. (6) is determined from the mean temperature profile as the altitude where the cooling of the initial temperature distribution is maximum. The rate of change of the height of the convective layer, made dimensionless by the convective velocity w_*, is found to be $(1/w_*)(\partial z_i/\partial t)=0.025$ and 0.013 for S1 and S2 respectively. These values are in particularly good agreement with the experimental estimations of 0.023 and 0.013.

Fig. 3 shows the vertical profile of the turbulent heat

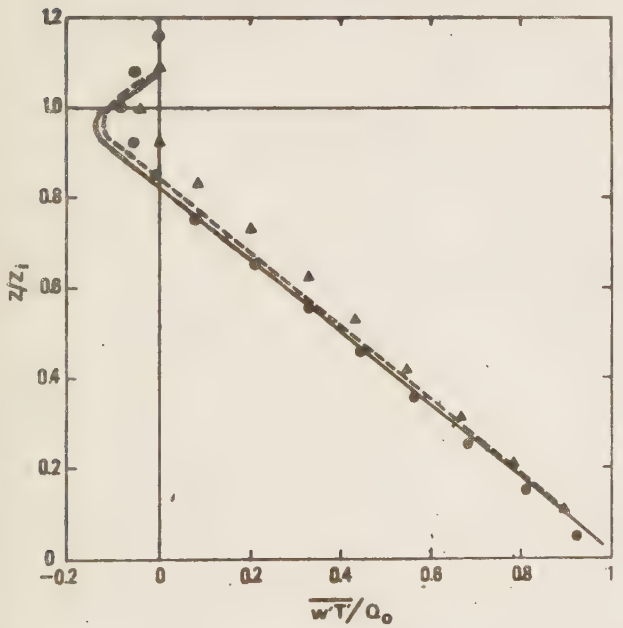

FIG. 3. Vertical profiles of dimensionless heat flux: continuous line, S1 model data; circles, S1 experimental data; dashed line, S2 model data; triangles, S2 experimental data.

flux $\overline{w'T'}$ for Cases S1 and S2. The height is scaled with z_i and the heat flux is scaled with its surface value Q_0. Once again the agreement between experimental and computed curves is very good in the adiabatic layer. In the "overshoot" region, at the top of the adiabatic layer, the negative values of the heat flux seem slightly overestimated by the numerical model. This small discrepancy may be due to the fact that the experimental heat fluxes reported by Willis and Deardorff were obtained by numerical integration of the temperature equation (1) from eight successive mean temperature profiles; consequently the heat flux profiles may have been artificially smoothed out by such a procedure. However that may be, the negative value of $\overline{w'T'}$ in the "overshoot" is found to be larger for Case S1 than for Case S2, as was to be expected.

b. Eddy kinetic energy

The vertical velocity variance $\overline{w'^2}$, made dimensionless by the square of the convective velocity w_*, is plotted in Fig. 4 as a function of z/z_i. It can be seen

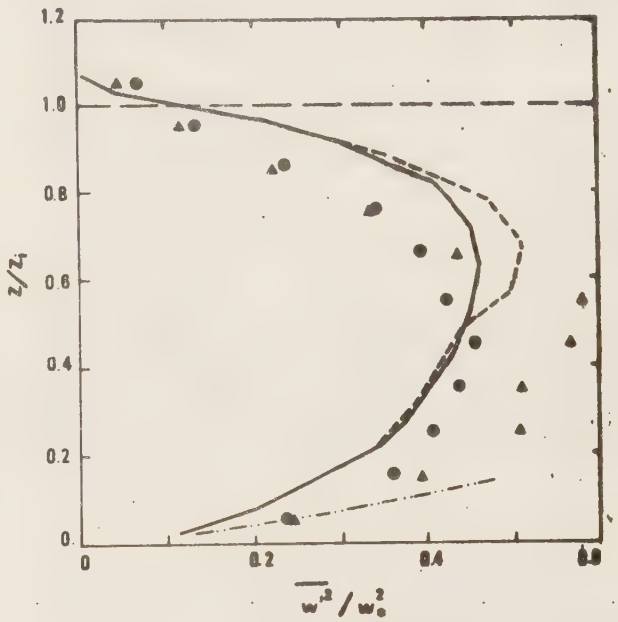

FIG. 4. Vertical profiles of dimensionless vertical velocity variance. Symbols as in Fig. 3; the dotted-dashed line is the free convection surface layer profile.

that the overall shape of the profiles is recovered in the two cases. In particular, the maximum of $\overline{w'^2}$ is found just above the middle of the convective layer and its value is of the order of 0.45 w_*^2 for Case S1 or of 0.60 w_*^2 for Case S2. In agreement with experiment, the numerical model shows that $\overline{w'^2}/w_*^2$ reaches higher values in S2 than in S1.

The dimensionless horizontal velocity variance $\overline{e_h}/w_*^2$ is shown in Fig. 5. The profiles for Cases S1 and S2 are

FIG. 5. Vertical profiles of dimensionless horizontal velocity variance. Symbols as in Fig. 3.

found to be almost identical except in the upper part of the convective layer where Case S2 gives rise to higher values of horizontal velocity variance. In agreement with experimental results, the horizontal velocity variance is approximately constant throughout the layer, with a sharp decrease under the inversion level and an increase towards its surface value for $z/z_i \leqslant 0.1$.

The computed eddy kinetic energy flux $\overline{w'e}$ $[=\overline{w'e_k}+\frac{1}{2}\overline{w'^3}]$, scaled by w_*^3, is compared in Fig. 6 to its measured values for Cases S1 and S2. In both cases the profiles are almost identical. This is not in contradiction with the experimental results since Willis and Deardorff report that their profile for Case S2 is probably spurious. In agreement with experimental data the maximum occurs at an altitude $z \approx 0.5 z_i$ and the maximum value of $\overline{w'e}$ is found to be of the order of $0.17 w_*^3$. This particularly good agreement between computed and experimental curves justifies the validity and accuracy of the clipping approximation. Indeed it gives the right values of the vertical flux of eddy kinetic energy, a physically important third-order correlation. Fig. 6 shows also that the free convection profile of $\overline{w'e}$ (Wyngaard and Coté, 1971; Willis and Deardorff, 1974) seems to apply up to an altitude $z \approx 0.1 z_i$. This problem will be further discussed in the next section.

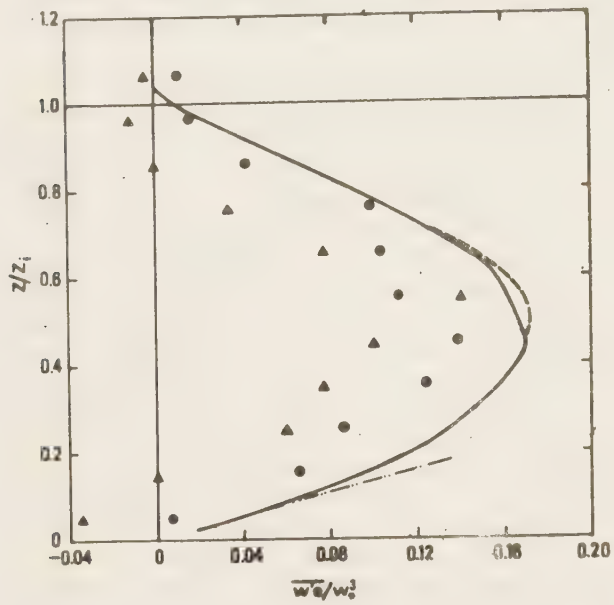

FIG. 6. Vertical profiles of dimensionless vertical kinetic energy flux. Symbols as in Fig. 3; the dotted-dashed line is the free convection surface layer profile of slope 0.7.

At this point we note that with a gradient-diffusion approximation,

$$\overline{w'^3} = -K\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z},$$

it is necessary to consider a negative "eddy viscosity" K in order to insure the positivity of $\overline{w'^3}$ in the surface layer (Wyngaard, 1973). But then a negative K would obviously imply a downward flux of eddy kinetic energy in the upper part of the convective layer, in contradiction with experimental evidence. On the other hand, a gradient-diffusion approximation with positive eddy viscosity, an example being that used by Donaldson (1973), would be inadequate in the surface layer.

c. *Temperature variance*

Fig. 7 shows the vertical profile of the temperature

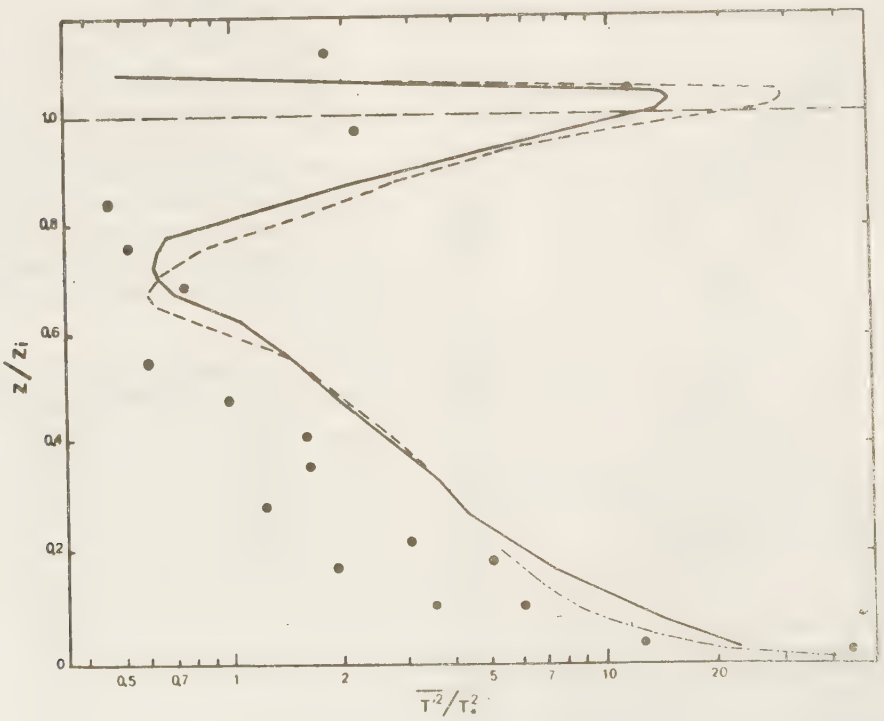

FIG. 7. Vertical profiles of dimensionless temperature variance. Symbols as in Fig. 3; the dotted-dashed line is the free convection surface layer profile.

variance $\overline{T'^2}$, scaled with T_*^2 where $T_*=Q_0/w_*$ (Deardorff, 1970), for Cases S1 and S2. The numerical model gives the same shape and order of magnitude as in the laboratory experiment. The maximum of temperature variance at the inversion level and its minimum occurring inside the convective layer (at $z\approx 0.75z_i$) are recovered. It can also be seen that in Case S2 the temperature variance reaches a higher value at the inversion level. This was to be expected; indeed, in this case, the lapse rate of the overlying stable layer is larger and the heat flux is only slightly reduced from its value for Case S1. It therefore implies a larger gradient production rate of $\overline{T'^2}$ at inversion level (see Section 5).

At this point we note that the large value of the numerical constant c_2 appearing in the molecular destruction rate of temperature variance [Eqs. (5) and (14)] was intended to take into account the effect of the restricted width of the convection chamber. Indeed, in cases where large horizontal scales must be included, the temperature variance reaches higher values (e.g., Telford and Warner, 1964); consequently it would be necessary to choose a smaller value for c_2.

All the above comparisons between the numerical model and the laboratory measurements show that the clipping approximation is accurate enough for the simulation of such an important inhomogeneous turbulence problem as penetrative convection. Such a closure assumption, however, does not only provide a good description of mean parameters and second-order correlations; it also predicts third-order correlations which are in particularly good agreement with the measured ones, as evidenced by Fig. 6. This is a direct verification of the accuracy of the clipping approximation.

5. Budgets of second-order correlations

In order to test the stationarity of the numerical model after the buildup stage, and consequently the stability of the clipping approximation, it is of interest to consider the budgets of the second-order correlations. This will also give information about the third-order correlations since they act as diffusion terms for second-order correlations.

a. Budget of eddy kinetic energy

By adding Eqs. (3) and (4) we get the time rate of change of the eddy kinetic energy $\bar{e}$:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}=-\frac{\partial \overline{w'e}}{\partial z}-c_1\frac{\bar{e}^{\frac{3}{2}}}{l}+\alpha g\overline{w'T'}+c_3\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{e}^{\frac{1}{2}}l\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right), \quad (22)$$

where the terms of the right-hand side represent respectively the turbulent diffusion, viscous dissipation, buoyant production, and pressure transport of eddy kinetic energy. These various terms, made dimensionless by w_*^3/z_i, are shown, for Case S1, in Fig. 8. It is

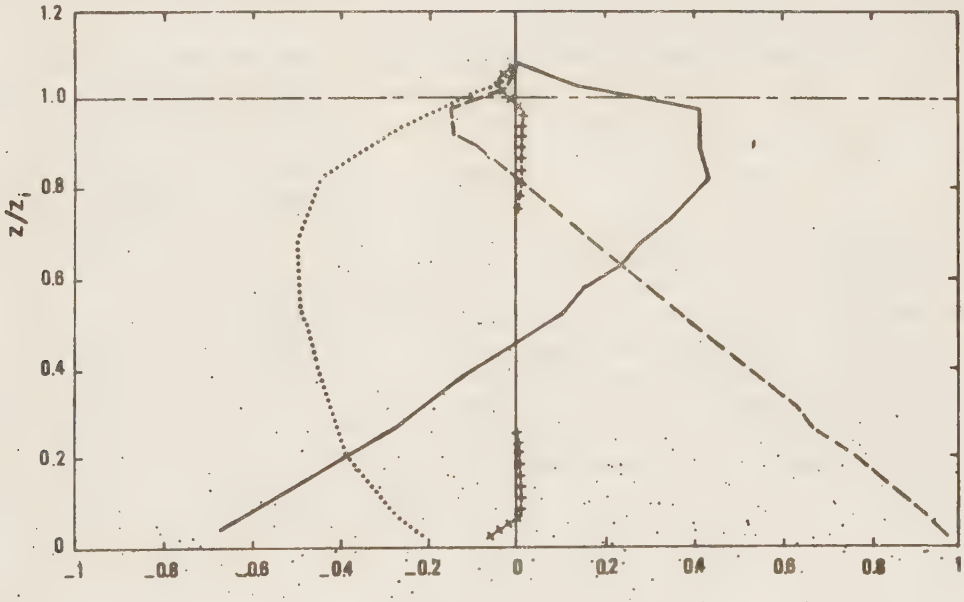

FIG. 8. Dimensionless eddy kinetic energy budget for Case S1: continuous line, turbulent diffusion; dotted line, viscous dissipation; dashed line, buoyant production; plus marks, pressure transport. See Figs. 8 and 9 of Willis and Deardorff (1974) for comparison with the experimental data.

found that the pressure term vanishes in the largest part of the convective layer but that it extracts eddy kinetic energy from the surface layer and from the top of the convective layer. The overall budget is characterized by a vertical turbulent transport of eddy kinetic energy from the lower part of the convective layer where it is principally produced, and by a dissipation which is essentially constant throughout the main part of the layer.

In the surface layer ($z \leqslant 0.1 z_i$), 80% of the kinetic energy produced by buoyancy is transported upward principally by turbulent diffusion and additionally by pressure transport. It implies that the slope a_4 of the free convection surface layer representation of $\overline{w'e}$, i.e.,

$$\overline{w'e} = a_4 u_f^3,$$

is of the order of 0.7, instead of 1 as proposed by Wyngaard and Coté (1971). This allows for a local dissipation of the eddy kinetic energy produced by buoyancy.

Near the inversion level the turbulent diffusion term is found to remain positive, balancing dissipation, negative production due to the conversion of kinetic energy into potential energy, and pressure transport.

All the above features are in good agreement with the experimental results.

From Eq. (22) it is also possible to compute the time rate of change of eddy kinetic energy $\partial \bar{e}/\partial t$. We found that

$$\left| \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} \right| \approx 0.007 (w_*^3/z_i),$$

and since $\bar{e} \approx 0.450 w_*^2$, the characteristic time of eddy kinetic energy evolution is very large compared to the time scale z_i/w_*. This is another numerical verification of the validity of z_i and w_* as scaling parameters for turbulent convection (Deardorff, 1970), but it also shows that the clipping approximation provides a stable scheme for the computation of third-order correlations.

b. Budget of heat flux

The heat flux budget is described by Eq. (2), where the terms on the right hand side represent respectively turbulent diffusion, gradient production, buoyant production, pressure-correlation effects, and pressure transport. These terms, made dimensionless by $Q_0 w_*/z_i$, are shown in Fig. 9 for Case S1. The heat flux production

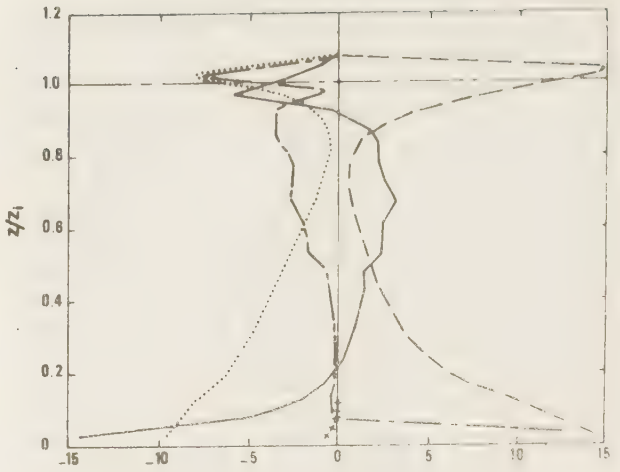

FIG. 9. Dimensionless heat flux budget for Case S1: continuous line, turbulent diffusion; irregular dashed line, gradient production; uniform dashed line, buoyant production; dotted line, pressure-correlation effects; plus marks, pressure transport.

is important in the surface layer where buoyancy and unstable temperature gradient produce large positive heat flux. Only part of this heat flux is destroyed locally by pressure-correlation effects, the remaining part being transported upward by turbulent diffusion. Just under the inversion level, the large positive buoyancy production is only partly balanced by the negative gradient production due to the stable stratification and by the destruction by pressure-correlation effects. But the turbulent diffusion exports positive heat flux downward at a higher rate so that the heat flux becomes negative under the inversion. In the remaining part of the convective layer the total heat flux production and the positive contribution of turbulent diffusion from the surface layer and the inversion level are destroyed locally by pressure-correlation effects. The pressure transport term is found to vanish everywhere except in the surface layer but its value is still very small.

This budget can be favorably compared with the one established by Deardorff (1974b) in the case of convection in the atmospheric planetary boundary layer, with the turbulent diffusion term, in particular, showing excellent agreement.

c. Budget of temperature variance

The temperature variance budget is described by Eq. (5). Here the terms of the right-hand side represent respectively turbulent diffusion, gradient production, and molecular destruction. These terms, made dimensionless by $Q_0^2/w_* z_i$, are shown in Fig. 10 for Case S1.

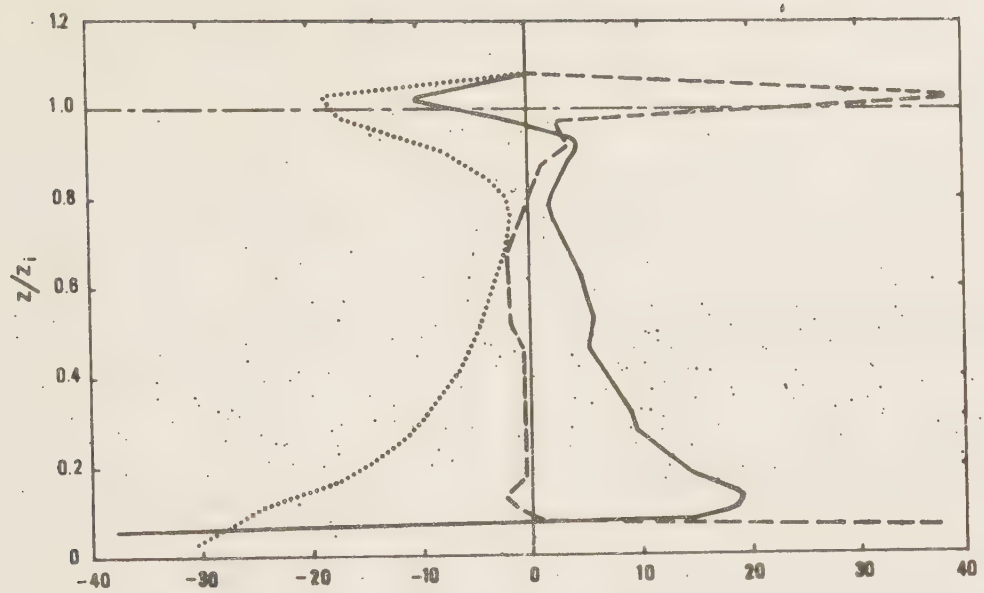

FIG. 10. Dimensionless temperature variance budget for Case S1: continuous line, turbulent diffusion; dotted line, molecular destruction; dashed line, gradient production.

The temperature variance production is only important in regions where a strong temperature gradient exists, i.e., in the surface layer and around the inversion level. In these two regions molecular destruction is not important enough to completely balance production, so that temperature variance is transported inside the whole convective layer where it is destroyed by molecular effects. Once again this budget is in good agreement with the one corresponding to convection in the atmospheric planetary boundary layer (Deardorff, 1974b) with particular concern to the turbulent diffusion term.

6. Effectiveness of the clipping approximation

It is of interest to check how frequently the realizability inequalities of the clipping approximation are enforced in our simulation. To measure this frequency we have computed the ratio of the number of corrected third-order correlations to the total number of third-order correlations computed during 1 min. This frequency takes different values for the various triple correlations introduced in Section 2, but it also changes with time. At the very beginning of the numerical simulation, during the buildup stage, the third-order correlations are corrected very frequently, but the frequencies become smaller as time elapses (Table 1).

TABLE 1. Frequency of enforcement of realizability inequalities.

	$\overline{w'^3}$	$\overline{w'^2T'}$	$\overline{w'T'^2}$	$\overline{T'^3}$	$\overline{w'e_h}$	$\overline{e_hT'}$
Buildup stage	69%	71%	67%	71%	30%	30%
Final stage	54%	69%	55%	63%	2%	12%

This decrease in the frequency of enforcement of realizability inequalities suggests that the clipping approximation is also effective in correcting the inconsistencies introduced by our crude initial conditions. At this point we note that in subgrid-scale theories there is also a need for realizability control on second-order subgrid-scale quantities (Deardorff, 1973, 1974a). This can be ascribed, of course, to truncation errors but may also be due to a lack of realism in the initial conditions.

In all the computations reported here the enforcement of realizability inequalities for triple correlations was sufficient to prevent any violation of realizability conditions by second-order correlations, such as the development of negative energy or temperature variance.

If the realizability conditions are not enforced, that is, if we use the quasi-normal theory alone, the triple correlations rapidly develop very large values. Consequently, these impossibly large triple correlations transport too much kinetic energy and temperature variance so that these latter quantities become negative in some places, thus inducing a blow-up of the quasi-normal model.

7. Conclusion

The quasi-normal theory modified by the clipping approximation gives a convenient framework in which to study inhomogeneous turbulence problems like turbulent convection. The numerical results presented in the case of laboratory penetrative convection in water are in good agreement with experimental data for mean temperature and second-order correlations as well as for third-order correlations. In particular, it is possible to recover, with the clipping approximation, the experimental profile of the vertical flux of eddy kinetic energy, a result which would have been impossible with an approximation of the gradient-diffusion type. Moreover, our turbulence approximation is consistent with the scaling laws for convective layers based on convective velocity and temperature.

The computing time required by the clipping approximation is reasonable. As an example, the numerical simulation of a 12 min period with a 50-level model requires 110 s of CDC 6600 computing time.

The good description of dynamical processes in inhomogeneous turbulent convection and the small computing time required by the clipping approximation encourage investigation of more complex problems like the evolution of the atmospheric planetary boundary layer.

Acknowledgments. The authors would like to thank the staff of the computing and drafting facilities of the Météorologie Nationale.

REFERENCES

André, J. C., and P. Lacarrère, 1975: Les ondes de gravité internes et leur traitement numérique dans les modèles de couche limite atmosphérique. *La Météorologie V*, **33**, 1–19.

——, G. De Moor, P. Lacarrère and R. du Vachat, 1976: Turbulence approximation for inhomogeneous flows: Part I. The clipping approximation. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 111–111.

Businger, J. A., 1973: Turbulent transfer in the atmospheric surface layer. *Workshop on Micrometeorology*, Boston, Amer. Meteor. Soc., 67–100.

Deardorff, J. W., 1970: Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for Rayleigh convection. *J. Atmos. Sci.*, **27**, 1211–1213.

——, 1973: The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. *J. Fluid Eng.*, **95**, 429–438.

——, 1974a: Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer. *Bound.-Layer Meteor.*, **7**, 81–106.

——, 1974b: Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer. *Bound.-Layer Meteor.*, **7**, 199–226.

Donaldson, C. du P., 1973: Construction of a dynamical model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants. *Workshop on Micrometeorology*, Boston, Amer. Meteor. Soc., 313–392.

Launder, B. E., 1975: On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. *J. Fluid Mech.*, **67**, 569–581.

Lewellen, W. S., and M. Teske, 1973: Prediction of the Monin-Obukhov similarity functions from an invariant model of turbulence. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 1340–1345.

Lilly, D. K., 1965: On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. *Mon. Wea. Rev.*, **93**, 11–26.

Somméria, G., 1974: Modèle tri-dimensionnel pour la simulation numérique de la couche limite planétaire-Application à la couche limite tropicale. Thesis, University of Paris.VI.

Telford, J. W., and J. Warner, 1964: Fluxes of heat and vapor in the lower atmosphere derived from aircraft observations. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 539–548.

Willis, G. E., and J. W. Deardorff, 1974: A laboratory model of the unstable planeary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1297–1307.

Wyngaard, J. C., 1973: On surface layer turbulence. *Workshop on Micrometeorology*, Boston, Amer. Meteor. Soc., 101–149.

——, and O. R. Coté, 1971: The budgets of turbulent kinetic energy and temperature variance in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 190–201.

——, and ——, 1974: The evolution of a convective planetary boundary layer—A higher-order-closure model study. *Bound.-Layer Meteor.*, **7**, 289–308.

——, and Y. Izumi, 1971: Local free convection, similarity, and the budgets of shear stress and heat flux. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 1171–1182.

BIBLIOGRAPHIE GENERALE

ANDRE,J.C., 1974: Irreversible interaction between cumulants in homogeneous, isotropic, two-dimensional turbulence. Physics Fluids, 17, 15-21.

ANDRE,J.C., G. DE MOOR, P. LACARRERE & R. du VACHAT, 1976a: Turbulence approximation for inhomogeneous flows- Part I: The clipping approximation. Journal Atmospheric Sciences, 33,

ANDRE,J.C., G. DE MOOR, P. LACARRERE & R. du VACHAT, 1976b: Turbulence approximation for inhomogeneous flows- Part II: The numerical simulation of a penetrative convection experiment. Journal Atmospheric Sciences, 33,

ANDRE,J.C., & P. LACARRERE, 1975: Les ondes de gravité internes et leur traitement numérique dans les modèles de couche limite atmosphérique. La Météorologie V, 33, 1-19.

ANDRE,J.C., & M. LESIEUR, 1976: Evolution of high Reynolds number isotropic three-dimensional turbulence- Influence of helicity. Soumis pour publication à Journal Fluid Mechanics.

BATCHELOR,G.K., 1953: The Theory of Homogeneous Turbulence, Cambridge, Cambridge University Press.

BLANCHET,J., 1970: Etude statistique d'un système fluide- Application à la météorologie. La Météorologie V, 15, 15-78.

BLANCHET,J., 1975: Concepts nouveaux sur la mécanique de la turbulence. La Météorologie VI, 1, 63-73; Ibid., 2, 47-56; Ibid., 3, 83-95.

BUSCH,N.E., 1973: On the mechanics of atmospheric turbulence. Workshop on Micrometeorology, Boston, Amer. Meteor. Soc., 1-65.

BUSINGER,J.A., 1973: Turbulent transfer in the atmospheric surface layer. Workshop on Micrometeorology, Boston, Amer. Meteor. Soc., 67-100.

BUSINGER,J.A., J.C. WYNGAARD, Y. IZUMI & E.F. BRADLEY, 1971: Flux-profile relationships in the atmospheric surface layer. Journal Atmospheric Sciences, 28, 181-189.

CLARKE,R.H., 1974: Attempts to simulate the diurnal course of meteorological variables in the boundary layer. Izv. Atmospheric Oceanic Physics, 10, 600-612.

CLARKE,R.H., A.J. DYER, R.R. BROOK, D.G. REID & A.J. TROUP, 1971: The Wangara experiment- Boundary layer data. Papier N°19, Division Meteorological Physics CSIRO, Australie.

CLAUSER,F.H., 1956: The turbulent boundary layer. Advances Applied Mechanics, 4, 1-51.

COMTE-BELLOT,G., 1965: Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles. Publications Scientifiques Techniques Ministère Air, N° 419.

DEARDORFF,J.W., 1966: The counter-gradient heat flux in the lower atmosphere and the laboratory. Journal Atmospheric Sciences, 23, 503-506.

DEARDORFF,J.W., 1970a: A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. Journal Fluid Mechanics, 41, 453-480.

DEARDORFF,J.W., 1970b: Convective velocity and temperature scales for the unstable planetary boundary layer and for Rayleigh convection. Journal Atmospheric Sciences, 27, 1211-1213.

DEARDORFF,J.W., 1972 : Numerical investigation of neutral and unstable planetary boundary layer. Journal Atmospheric Sciences, 29, 91-115.

DEARDORFF,J.W., 1973: The use of subgrid transport equations in a three-dimensional model of atmospheric turbulence. Journal Fluids Engineering, 95, 429-438.

DEARDORFF,J.W., 1974a: Three-dimensional numerical study of the height and mean structure of a heated planetary boundary layer. Boundary-Layer Meteorology, 7, 81-106.

DEARDORFF,J.W., 1974b: Three-dimensional numerical study of turbulence in an entraining mixed layer. Boundary-Layer Meteorology, 7, 199-226.

DEARDORFF,J.W., G.E. WILLIS & D.K. LILLY, 1969: Laboratory investigation of non-steady penetrative convection. Journal Fluid Mechanics, 35, 7-31.

DONALDSON,C.duP., 1973: Construction of a dynamic model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants. Workshop on Micrometeorology, Boston, Amer. Meteor. Soc., 313-392.

DUTTON,J.A., & G.H. FICHTL, 1969: Approximate equations of motion for gases and liquids. Journal Atmospheric Sciences, 26, 241-254.

EDWARDS,S.F., 1964: The statistical dynamics of homogeneous turbulence. Journal Fluid Mechanics, 18, 239-273.

EGGER,J., 1975: A statistical-dynamical model of the zonally averaged steady-state of the general circulation of the atmosphere. Tellus, 27, 325-350.

HALTINER,G.J., 1971: Numerical Weather Prediction, New-York, J. Wiley & Sons.

HERRING,J.R., 1965: Self-consistent-field approach to turbulence theory. Physics Fluids, 8, 2219-2225.

HERRING,J.R., 1966: Self-consistent-field approach to nonstationary turbulence. Physics Fluids, 9, 2106-2110.

HERRING,J.R., & R.H. KRAICHNAN, 1972: Comparison of some approximations for isotropic turbulence. Statistical Models and Turbulence, Berlin, Springer, 148-194.

HUSSAIN,A.K.M.F., & W.C. REYNOLDS, 1975: Measurements in fully developed turbulent channel flow. Communication à Fluids Engineering Conference, Minneapolis.

KAMPE de FERIET,J., 1951: Averaging processes and Reynolds equations in atmospheric turbulence. Journal Meteorology, 8, 358-361.

KOLMOGOROV,A.N., 1941: Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. Comptes Rendus Académie Sciences URSS, 32, N°1.

KOLOVANDIN,B.A., & I.A. VATUTIN, 1972: Statistical transfer theory in non-homogeneous turbulence. International Journal Heat Mass Transfer, 15, 2371-2383.

KRAICHNAN,R.H., 1959: The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds number. Journal Fluid Mechanics, 5, 497-543.

KRAICHNAN,R.H., 1961: Dynamics of nonlinear stochastic systems. Journal Mathematical Physics, 2, 124-148.

KRAICHNAN,R.H., 1962: The closure problem of turbulence theory. Proceedings Symposia Applied Mathematics, Vol XIII, Providence, Amer. Math. Soc., 199-225.

KRAICHNAN,R.H., 1971: An almost-Markovian Galilean-invariant turbulence model. Journal Fluid Mechanics, 47,513-524.

KRAICHNAN,R.H., 1972: Test-field model for inhomogeneous turbulence. Journal Fluid Mechanics, 56, 287-304.

LAUFER,J., 1951: Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel. National Advisory Committee Aeronautics, Technical Report N°1053.

LAUFER,J., 1954: The structure of turbulence in fully developed pipe flow. National Advisory Committee Aeronautics, Technical Report N°1174.

LAUNDER,B.E., 1975: On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. Journal Fluid Mechanics, 67, 569-581.

LAUNDER,B.E., G.J. REECE & W. RODI, 1975: Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. Journal Fluid Mechanics, 68, 537-566.

LEITH,C.E., 1971: Atmospheric predictability and two-dimensional turbulence. Journal Atmospheric Sciences, 28, 145-161.

LEITH,C.E., & R.H. KRAICHNAN, 1972: Predictability of turbulent flows. Journal Atmospheric Sciences, 29, 1041-1058.

LENSCHOW,D.H., 1973: Two examples of planetary boundary layer modification over the Great Lakes. Journal Atmospheric Sciences, 30, 568-581.

LENSCHOW,D.H., & W.B. JOHNSON Jr., 1968: Concurrent airplane and balloon measurements of atmospheric boundary-layer structure over a forest. Journal Applied Meteorology, 7, 79-89.

LEORAT,J., 1975: La turbulence magnétohydrodynamique hélicitaire et la génération des champs magnétiques à grande échelle. Thèse, Université de Paris VII.

LESIEUR,M., 1973: Contribution à l'étude de quelques problèmes en turbulence pleinement développée. Thèse, Université de Nice.

LETTAU,H.H., & B. DAVIDSON, 1957: Exploring the Atmosphere's First Mile. Londres, Pergamon Press.

LEWELLEN,W.S., & M. TESKE, 1973: Prediction of the Monin-Obukhov similarity functions from an invariant model of turbulence. Journal Atmospheric Sciences, 30, 1340-1345.

LILLY,D.K., 1965: On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysi cal fluid dynamics problems. Monthly Weather Review, 93, 11-26.

LUMLEY,J.L., 1970: Stochastic Tools in Turbulence. New-York, Academic Press.

LUMLEY,J.L., & B. KHAJEH-NOURI, 1974: Computational modeling of turbulent transport. Advances Geophysics, 18A, 169-192.

MATHIEU,J., 1959: Contribution à l'étude aérothermique d'un jet plan évoluant en présence d'une paroi. Thèse, Faculté des Sciences de Grenoble.

MIHALJAN,J.M., 1962: A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid. Astrophysical Journal, 136, 1126-1133.

MILLIKAN,C.B., 1939: A critical discussion of turbulent flows in channels and circular tubes. Proceedings Fifth International Congress Applied Mechanics, New-York, J. Wiley & Sons, 386-392.

MILLIONSHCHIKOV,M., 1941: On the theory of homogeneous and isotropic turbulence. Comptes Rendus Académie Sciences URSS, 32, 615-618.

MONIN,A.S., & A.M. YAGLOM, 1971: Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence. Cambridge, MIT Press.

MOREL,P., & M. LARCHEVEQUE, 1974: Relative dispersion of constant level balloons in the 200-mb general circulation. Journal Atmospheric Sciences, 31, 2189-2196.

Mc BEAN,G.A., & J.A. ELLIOTT, 1975: The vertical transports of kinetic energy by turbulence and pressure in the boundary layer. Journal Atmospheric Sciences, 32, 753-766.

O'BRIEN,E.E., & G.C. FRANCIS, 1962: A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation. Journal Fluid Mechanics, 13, 369-375.

OGURA,Y., 1962a: Energy transfer in a normally distributed and isotropic turbulent velocity field in two dimensions. Physics Fluids, 5, 395-401.

OGURA,Y., 1962b: Energy transfer in isotropic turbulent flow. Journal Geophysical Research, 67, 3143-3149.

OGURA,Y., 1963: A consequence of the zero-fourth-cumulant approximation in the decay of isotropic turbulence. Journal Fluid Mechanics, 16, 33-40.

ORSZAG,S.A., 1970: Analytical theories of turbulence. Journal Fluid Mechanics, 41, 363-386.

ORSZAG,S.A., 1973: The statistical theory of turbulence. A paraître dans Proceedings 1973 Les Houches Summer School Theoretical Physics, New-York, Gordon & Breach.

ORSZAG,S.A., & M.D. KRUSKAL, 1968: Formulation of the theory of turbulence. Physics Fluids, 11, 43-60.

POUQUET,A., M. LESIEUR, J.C. ANDRE & C. BASDEVANT, 1975: Evolution of high Reynolds number two-dimensional turbulence. Journal Fluid Mechanics, 72, 305-319.

PRANDTL,L., 1925: Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Zeitschrift Angewandte Mathematik Mechanik, 5, 136-139.

PROUDMAN,I., & W.H. REID, 1954: On the decay of a normally distributed and homogeneous turbulent velocity field. Philosophical Transactions Royal Society London, A247, 163-189.

ROTTA,J., 1951: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. Zeitschrift Physik, 129, 547-572.

ROWLAND,J.R., 1973: Intensive probing of clear air convective field by radar and instrumented drone aircraft. Journal Applied Meteorology, 12, 149-155.

SCHUMANN,U., 1976: Realizability of Reynolds-stress turbulence models. Soumis pour publication à Physics Fluids.

SMAGORINSKY,J., 1963: General circulation experiments with the primitive equations- Part I: The basic experiment. Monthly Weather Review, 91, 99-164.

SOMMERIA,G., 1974: Modèle tridimensionnel pour la simulation numérique de la couche limite planétaire- Application à la couche limite tropicale. Thèse, Université de Paris VI.

SPIEGEL,E.A., & G. VERONIS, 1960: On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. Astrophysical Journal, 131, 442-447.

STARR,V.P., 1968: Physics of the Negative Viscosity Phenomena. New-York, Mc Graw-Hill.

SULEM,P.L., M. LESIEUR & U. FRISCH, 1975: Le test-field-model interprété comme méthode de fermeture des équations de la turbulence. Annales Géophysique, 31, 52- .

TANAKA,H., 1969: 0-5th cumulant discard approximation of inviscid Burgers turbulence. Journal Meteorological Society Japan, 47, 373-383.

TATSUMI,T., 1957: The theory of decay process of incompressible isotropic turbulence. Proceedings Royal Society London, A239, 16-45.

TELFORD,J.W., & J. WARNER, 1964: Fluxes of heat and vapor in the lower atmosphere derived from aircraft observations. Journal Atmospheric Sciences, 21, 539-548.

TENNEKES,H., & J.L. LUMLEY, 1972: A First Course in Turbulence, Cambridge, MIT Press.

TOWNSEND,A.A., 1964: Natural convection in water over an ice surface. Quarterly Journal Royal Meteorological Society, 90, 248-259.

TURNER,J.S., 1973: Buoyancy Effects in Fluids, Cambridge, Cambridge University Press.

du VACHAT,R., 1976: Realizability inequalities in turbulent flows. Physics Fluids, à paraître.

WILLIS,G.E., & J.W. DEARDORFF, 1974: A laboratory model of the unstable planetary boundary layer. Journal Atmospheric Sciences, 31, 1297-1307.

WYNGAARD,J.C., 1973: On surface layer turbulence. Workshop on Micrometeorology, Boston, Amer. Meteor. Soc., 101-149.

WYNGAARD,J.C., & O.R. COTE, 1971: The budgets of turbulent kinetic energy and temperature variance in the atmospheric surface layer. Journal Atmospheric Sciences, 28, 190-201.

WYNGAARD,J.C., & O.R. COTE, 1974: The evolution of a convective planetary boundary layer- A higher-order-closure model study. Boundary-Layer Meteorology, 7, 289-308.

WYNGAARD,J.C., O.R. COTE & Y. IZUMI, 1971: Local free convection, similarity, and the budgets of shear stress and heat flux. Journal Atmospheric Sciences, 28, 1171-1182.

WYNGAARD,J.C., O.R. COTE & K.S. RAO, 1974: Modeling the atmospheric boundary layer. Advances Geophysics, 18A, 193-211.

YAMADA,T., & G. MELLOR, 1975: A simulation of the Wangara atmospheric boundary layer data. Journal Atmospheric Sciences, 32, 2309-2329.